Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:

a) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx \quad (x>0)$ **b)** $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$

---

a)

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{(\ln x)^2}_{f}\,\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx = \underbrace{(\ln x)^2}_{f}\,\underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{2\,\ln x\,\frac{1}{x}}_{f'}\,\underbrace{\ln x}_{g}\,dx \\ &= (\ln x)^3 - 2\int (\ln x)^2\,\frac{1}{x}\,dx \\ &= (\ln x)^3 - 2\,I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$$

b)

$$\begin{aligned} \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{\ln(1+x^2)}_{g}\,dx &= \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\ln(1+x^2)}_{g} - \int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\frac{2\,x}{1+x^2}}_{g'}\,dx \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\,x + 2\arctan x + C \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Umformung

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

entspricht der Polynomdivision mit Rest.

$\square$

Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Substitution:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ **b)** (*) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

---

a) Termsubstitution:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = u \\ \cos x\,dx = du \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\sin x} + C$$

b) Variablensubstitution:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = \sin u \\ dx = \cos u\,du \\ x = 0 \;\rightsquigarrow\; u = 0 \\ x = 1 \;\rightsquigarrow\; u = \pi/2 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sin^2 u\,\cos^2 u\,du$$

Nun gilt

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 u\,\cos^2 u\,du = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,du - \int_0^{\pi/2} \cos^4 u\,du = I_1 - I_2$$

mit (P.I.:)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} \cos u \cdot \cos u\,du \\ &= \sin u\,\cos u\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin u\,(-\sin u)\,du \\ &= 0 + \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 u)\,du = \frac{\pi}{2} - I_1 \quad\Rightarrow\quad I_1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi/2} \cos u \cdot \cos^3 u\,du \\ &= \sin u\,\cos^3 u\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin u\,\big(3\cos^2 u\,(-\sin u)\big)\,du = 0 + 3\,I \end{aligned}$$

Daher:

$$I = I_1 - I_2 = I_1 - 3\,I = \frac{\pi}{4} - 3\,I \quad\Rightarrow\quad 4\,I = \frac{\pi}{4}$$

Also:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = I = \frac{\pi}{16}$$

$\square$

Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int \frac{9\,x}{(x-1)^2\,(x+2)}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{2\,x}{x^4+6\,x^2+25}\,dx$

Anmerkung: Lösen Sie **b)** ohne Zuhilfenahme der Partialbruchzerlegung.

---

a) Partialbruchzerlegung $\rightsquigarrow$

$$\frac{9\,x}{(x-1)^2\,(x+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{x+2}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\int \frac{9\,x}{(x-1)^2\,(x+2)}\,dx &= 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{x-2} \\ &= 2\,\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - 2\,\ln|x-2| + C\end{aligned}$$

b) Umformen:

$$\frac{2\,x}{x^4+6\,x^2+25} = \frac{2\,x}{(x^2+3)^2+16} = \frac{1}{16}\,\frac{2\,x}{\left(\frac{x^2+3}{4}\right)^2+1}$$

$\rightsquigarrow$

$$\int \frac{2\,x}{x^4+6\,x^2+25}\,dx = \frac{1}{16}\int \frac{2\,x}{\left(\frac{x^2+3}{4}\right)^2+1}\,dx =$$

$$\left|\begin{array}{c} u = \frac{x^2+3}{4} \\ du = \frac{1}{2}\,x\,dx \\ dx = \frac{2\,du}{x} \end{array}\right| = \frac{1}{16}\int \frac{4\,du}{u^2+1} = \frac{1}{4}\,\arctan u = \frac{1}{4}\,\arctan\left(\frac{x^2+3}{4}\right) + C$$

$\square$

Betrachten Sie das 'Fourier-Integral'

$$I_n := \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

Dabei sei $f(x)$ eine mindestens k mal stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion.

Zeigen Sie folgende Abklingeigenschaft (Verhalten von I_n für $n \to \infty$):

$$|I_n| = \mathcal{O}(n^{-k}) \;\text{ für }\; n \to \infty\,, \quad \text{d.h.} \quad |I_n| \;\le\; \frac{C_k}{n^k}$$

mit einer – von f und k abhängigen, jedoch von n unabhängigen – Konstante C_k. Geben Sie eine derartige Konstante C_k an.

---

f, g mit Periode 2π: Partielle Integration führt auf

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx \;=\; \underbrace{f(x)\,G(x)\Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} f'(x)\,G(x)\,dx\,, \quad g(x) = G'(x)$$

Daher mittels mehrfacher partieller Integration:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx \\
&= -\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} f''(x)\sin(nx)\,dx \\
&= -\frac{1}{n^3}\int_0^{2\pi} f'''(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{n^4}\int_0^{2\pi} f^{(4)}(x)\sin(nx)\,dx \\
&\ldots \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Man erkennt:

$$|I_n| \le \frac{C_k}{n^k}\,, \quad \text{mit} \quad C_k \;=\; 2\pi \max_{x\,\in\,[0,2\pi]} |f^{(k)}(x)|$$

- Formaler Beweis mittels Induktion nach k (*straightforward*).
- Analog für $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$.

$\square$

(*) Geben Sie die allgemeine Darstellung, an in Abhängigkeit von $m, n \in \mathbb{N}_0$, für

$$\int_0^1 x^m \, (1-x)^n \, dx \, .$$

- Reduziere Potenz von $(1-x)$ mittels n-facher partieller Integration.
  Dabei verbleiben jeweils nur die Integralanteile, da $x(1-x) = 0$ für $x = 0, 1$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^m \, (1-x)^n \, dx \\
&= \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} \, (1-x)^{n-1} \, dx \\
&= \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)} \int_0^1 x^{m+2} \, (1-x)^{n-2} \, dx \\
&= \ldots \\
&= \frac{n(n-1)\cdots 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} \int_0^1 x^{m+n} \, (1-x)^{n-n} \, dx \\
&= \frac{m!\, n!}{(m+n)!} \int_0^1 x^{m+n} \, dx \;=\; \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!}
\end{aligned}$$

  Formaler Beweis mittels Induktion nach n (*straightforward*).

- Alternative: Verwende Binomischen Lehrsatz,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^m \, (1-x)^n \, dx &= \int_0^1 x^m \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k \right) dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 x^m \, (-x)^k \, dx
\end{aligned}$$

  mit

$$\int_0^1 x^m \, (-x)^k \, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{m+k+1} \, , & k \text{ gerade} \\[2ex] -\dfrac{1}{m+k+1} \, , & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^1 x^m \, (1-x)^n \, dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{m+k+1}$$

  ... dasselbe wie oben, aber Umformung kombinatorisch trickreich. $\square$

Untersuchen Sie die beiden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\,\ln x}$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$

---

a) Das uneigentliche Integral

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\,\ln x}$$

divergiert: Die Substitution $\ln x = u$, $\frac{dx}{x} = du$ zeigt

$$\int \frac{dx}{x\,\ln x}\,dx \;=\; \int \frac{du}{u} \;=\; \ln u \;=\; \ln(\ln(x)) + C\,,$$

mit $\ln(\ln(x)) \to \infty$ für $x \to \infty$.

b) Das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

konvergiert: Wegen $|\cos x| \le 1$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \;=\; \arctan(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} \;=\; \pi$$

konvergente Majorante. Also: 'absolut konvergent', mit

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx\right| \;\le\; \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| dx \;\le\; \pi\,.$$

Anmerkung: Die Bestimmung des exakten Wertes ist nichttrivial (keine einfache Stammfunktion). Computeralgebra: $\rightsquigarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx \;=\; \frac{\pi}{e}$$

$\square$

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{e^x - 1}$$

nicht existiert. Berechnen Sie den *Cauchyschen Hauptwert*

$$\mathrm{HW} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{e^x - 1} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{e^x - 1} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{e^x - 1} \right)$$

Stammfunktion:

$$\int \frac{dx}{e^x - 1} = \int \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\, dx = \int \ln|1 - e^{-x}| + C$$

(dies entspricht der Substitution $e^{-x} = u$). Daher für $\varepsilon \to 0+$:

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{e^x - 1} = \ln|1 - e^{-x}| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} = \ln \frac{|1 - e^{\varepsilon}|}{|1 - e|} = \ln \frac{e^{\varepsilon} - 1}{e - 1} \to -\infty$$

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{e^x - 1} = \ln|1 - e^{-x}| \Big|_{\varepsilon}^{1} = \ln \frac{|1 - e^{-1}|}{|1 - e^{-\varepsilon}|} = \ln \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-\varepsilon}} \to +\infty$$

Beide Integralanteile sind also divergent.

Cauchy'scher Hauptwert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{HW} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{e^x - 1} &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{e^x - 1} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{e^x - 1} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\ln \frac{e^{\varepsilon} - 1}{e - 1} + \ln \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-\varepsilon}} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \ln \frac{(e^{\varepsilon} - 1)(1 - e^{-1})}{(1 - e^{-\varepsilon})(e - 1)} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \ln \frac{e^{\varepsilon}}{e} = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\varepsilon - 1) = -1 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$\square$

Betrachten Sie nochmals die beiden Reihen, die sich in Beispiel 3c) vom 3. Übungsblatt aus der Bewegung von Bello in der x-y-Ebene ergeben haben: Für den Limes (x_∞, y_∞) von Bellos Position gilt

a) $$x_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

b) $$y_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$$

Berechnen Sie (x_∞, y_∞).

Hinweis: Verwenden Sie die Taylorreihen bezüglich der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ für die Funktionen $\arctan x$ und $\ln(1+x)$, und werten Sie diese an geeigneten Stellen x aus.

---

a) Arcustangens-Reihe:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für} \quad x \in [-1, 1]$$

Daher für $x = 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = x_\infty$$

b) Logarithmus-Reihe:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad \text{für} \quad x \in (-1, 1]$$

Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ ergibt für $x = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2} = y_\infty$$

$\square$

Das *Integralkriterium* stellt einen Zusammenhang zwischen unendlichen Reihen und uneigentlichen Integralen dar. (Es kann sowohl zum Konvergenznachweis für Reihen als auch für uneigentliche Integrale verwendet werden.)

Sei $m \in \mathbb{N}_0$, und f eine auf $[m, \infty)$ definierte, positive und monoton fallende Funktion. Dann haben

$$\int_m^\infty f(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=m}^\infty f(k)$$

das gleiche Konvergenzverhalten, d.h., das uneigentliche Integral links konvergiert genau dann wenn die Reihe rechts konvergiert.

(i) Untersuchen Sie mit Hilfe dieses Kriteriums die Konvergenz der Reihen

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k\,(\ln k)^\alpha}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$

in Abhängigkeit von dem Parameter α.

Hinweis: Führen Sie den Fall **b)** auf **a)** zurück, indem Sie das entsprechende Integral geeignet substituieren.

(ii) Der Beweis des Integralkriteriums beruht darauf, dass die Reihe einer Riemann-Summe für das Integral entspricht. Im Konvergenzfall gilt auch

$$\sum_{k=m+1}^\infty f(k) \le \int_m^\infty f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^\infty f(k)$$

Geben Sie mit Hilfe dieser beiden Ungleichungen ein Intervall (a, b) an mit

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \in [a, b]$$

Anmerkung (ohne Beweis:) Der exakte Wert dieser Reihe ist $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$.

$\longrightarrow$

(i) **a)** Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$, da das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\xi \to \infty} \int_1^\xi \frac{dx}{x^\alpha}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \leq 1$ divergiert (siehe VO).

b) Substitution:

$$\int_e^\xi \frac{dx}{x\,(\ln x)^\alpha} = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = dx/x \end{array} \right| = \int_1^{\ln \xi} \frac{dt}{t^\alpha}$$

$\xi \to \infty \quad \rightsquigarrow$

Die beiden uneigentlichen Integrale verhalten sich gleich, und daher haben auch die betreffenden Reihen das gleiche Konvergenzverhalten für jeden Wert von α.

(ii) Aus

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}}_{=1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 1 \leq 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \in [1, 2]\,.$$

$\square$

Bestimmen Sie Potenzreihenentwicklung (Taylorreihe) der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

bezüglich der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$, und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius. Konvergiert die Reihe innerhalb des Konvergenzintervalls gegen die Funktion $f(x)$?

Hinweis: Führen Sie die gesuchte Entwicklung auf eine bereits bekannte Reihe zurück.

Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

konvergiert für $|x| < 1$ $\rightarrow$ Taylorreihe der Funktion $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Daraus erhalten wir – zunächst rein formal – durch Multiplikation mit x:

$$f(x) = x \cdot g(x) = \frac{x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$$

Für $x \in (-1,1)$ ist die 'g - Reihe' eine konvergente Majorante für die 'f - Reihe', daher ist auch die 'f - Reihe' konvergent in $(-1,1)$ (Konvergenzradius $R = 1$).

$\rightarrow$ Warum gilt nun *tatsächlich* die Taylorreihendarstellung

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \quad ?$$

Begründung: Für jedes feste $x \in (-1,1)$ gilt nach den Rechenregeln für konvergente Reihen:

$$f(x) = x \cdot g(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot (-1)^n x^{2n},$$

und die so entstehende Reihe ist wiederum absolut konvergent für $x \in (-1,1)$ (das haben wir oben auch bereits gezeigt) *und konvergiert gegen* $x \cdot g(x) = f(x)$.

Allgemeiner funktioniert dies auch für das *Cauchy-Produkt konvergenter Taylorreihen.*

Anmerkung: Direktes Ausrechnen der Taylorkoeffizienten

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{für} \quad f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

(ohne Bezugnahme auf die geometrische Reihe) macht etwas mehr Arbeit. $\square$