Es gibt drei Typen von Aufgaben:

- *'Normale' Aufgaben (ohne (*)) bzw. Unterpunkte davon haben etwa den Charakter von möglichen Testaufgaben. (D.h., tatsächliche Testaufgaben sind ähnlich, aber sie werden natürlich in Umfang und Schwierigkeitsgrad an die zur Verfügung stehende Arbeitszeit angepasst.)*
- (∗) *Aufgaben mit (*) dienen der Vertiefung und können ggf. auch etwas schwieriger sein. Auch wenn es sich um keine typischen Testaufgaben handelt, ist die Beschäftigung damit nützlich für das aktive Erarbeiten des relevanten Stoffes.*
- (∗∗) *Kommt manchmal vor. Nicht testrelevant, behandelt stoffliche Erweiterungen, mit ausreichenden Hinweisen für die Lösung.*

1. Das *arithmetische Mittel* bzw. das *geometrische* Mittel zweier positiver Zahlen a, b ist definiert als

$$\frac{a+b}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a\,b}\,.$$

a) Deuten Sie die beiden Begriffe geometrisch.

b) Beweisen Sie

$$\sqrt{a\,b} \;\leq\; \frac{a+b}{2} \quad \forall\; a, b > 0.$$

In welchen Fällen gilt Gleichheit?

c) Beweisen Sie: Unter allen Rechtecken mit gegebener Fläche A hat das Quadrat mit Fläche A den kleinsten Umfang.

2. (∗) Beweisen Sie: *Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.*

Anmerkung: Die Aussage mag evident erscheinen, aber wie argumentiert man das logisch streng im Fall unendlicher Teilmengen? Führen Sie den Beweis in indirekter Weise.

3. a) Sei $m \leq n$. Geben Sie eine Formel für die Summe

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m + q^{m+1} + \ldots + q^n$$

an.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Summe

$$S_n(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{n} (1+\varepsilon)^k$$

ist ein Polynom vom Grad n in dem Parameter ε. Geben Sie die Koeffizienten a_j in der Darstellung

$$S_n(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n} a_j\,\varepsilon^j$$

an.

c) Die Zahlenfolge (a_k) sei rekursiv wie folgt definiert:

$$a_0 \text{ gegeben}; \quad a_n := 2\,a_{n-1} + c_n\,, \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

mit einer gegebenen Folge (c_n). Geben Sie unter Verwendung der geometrischen Summenformel einen expliziten Formelausdruck für die a_n an.

Anmerkung: Die Rekursion beschreibt einen diskreten Wachstumsprozess: a_n ist das Doppelte von a_{n-1} (wie bei einer geometrischen Folge), jeweils noch plus c_n.

Hinweis: Man rechnet einige Werte aus und kann so die allgemeine Gestalt der Lösung vermuten. Dann verifiziert man, dass die vermutete Lösung tatsächlich der gegebenen Rekursion genügt.

4. Beweisen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)\,k = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

5. Finden Sie heraus, welchem Bildungsgesetz der Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \big(3\,k^2 - 3\,k + 1\big), \quad n \in \mathbb{N},$$

gehorcht. Geben Sie aufgrund Ihrer Vermutung einen einfachen Formelausdruck in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ für den Wert der Summe an und beweisen Sie seine Korrektheit.

6. Stellen Sie folgendes Produkt in der einfachst möglichen Weise als Formelausdruck in n dar $(n \in \mathbb{N})$:

$$\prod_{k=1}^{n} \Big(1 + \frac{n}{k}\Big)$$

7. $(*)$ Eine Verallgemeinerung des Binomischen Lehrsatzes ist der *Multinomialsatz:*.

Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a_1 + \cdots + a_m)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1,\ldots,k_m} \prod_{\ell=1}^{m} a_\ell^{k_\ell}, \quad \text{mit} \quad \underbrace{\binom{n}{k_1,\ldots,k_m}}_{\text{Multinomialkoeffizient}} := \frac{n!}{\prod\limits_{\ell=1}^{m} k_\ell\,!}\,.$$

Dabei ist die Summe

$$\sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \cdots$$

so zu verstehen, dass alle möglichen geordneten Tupel[1] $(k_1,\ldots,k_m)$ mit $k_\ell \in \{0,1,\ldots,n\}$ berücksichtigt werden, deren Summe $k_1 + \cdots + k_m$ genau gleich n ist.

a) Zeigen Sie, dass sich für $m = 2$ genau der Binomische Lehrsatz ergibt.

b) Tabellieren Sie für den Fall $m = 3$ die Multinomialkoeffizienten zu $n = 1,2,3$.

c) Geben Sie eine kombinatorische Deutung der Multinomialkoeffizienten an.

[1] Verallgemeinerung des Begriffes ‘geordnetes Paar’

8. Vorbemerkung: Für das kartesische Produkt $A \times A$ schreibt man auch A^2.

a) Sei A eine nichtleere Menge. Wie sieht $A \times \{\,\}$ aus?

b) Seien A und B beliebige Mengen. Zeigen Sie

$$(A \cup B)^2 = A^2 \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup B^2 .$$

c) Unter welcher Bedingung an A und B gilt $A \times B = B \times A$?

d) Falls A und B disjunkte Mengen sind, d.h. falls sie kein gemeinsames Element haben ($A \cap B = \{\,\}$), schreibt man für die Vereinigungsmenge manchmal auch $A \cup B =: A + B$. Zeigen Sie für diesen Fall

$$(A \cup B)^2 = A^2 + (A \times B) + (B \times A) + B^2 ,$$

insbesondere dass alle 4 rechts auftretenden kartesischen Produkte paarweise disjunkt sind.

9. a) Geben Sie folgende rationale Zahlen in Dezimaldarstellung an:

$$\frac{25}{11} \qquad \frac{25}{12} \qquad \frac{25}{13}$$

b) Wandeln Sie folgende Dezimalzahlen in Brüche um:

$$2.\overline{63} \qquad 2.41\overline{6}$$

10. (**) $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl; es handelt sich als um ein nichttriviales mathematisches Objekt. Man kann jedoch eine formal saubere, rein rationale Erweiterung von $\mathbb{Q}$ angeben, wobei $\sqrt{2}$ einfach 'dazugeschwindelt' wird. Das geht so: Wir betrachten Zahlenpaare $w = (x, y) \in \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und definieren die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \text{Addition:} \quad & w_1 + w_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{Q}^2 \\ \text{Multiplikation:} \quad & w_1 \cdot w_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1\, x_2 + 2\, y_1\, y_2, x_1\, y_2 + x_2\, y_1) \in \mathbb{Q}^2 \end{aligned}$$

Die Menge $\mathbb{Q}^2$ gemeinsam mit den so definierten Operationen bezeichnen wir mit $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$. Identifizieren wir[2] die speziellen Elemente der Gestalt $w = (x, 0)$ mit $\mathbb{Q}$, so stellt $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ offensichtlich eine (formal 'zweidimensionale') Erweiterung des rationalen Zahlenbereiches $\mathbb{Q}$ dar.

a) Man kann zeigen, dass in $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ alle Rechengesetze ('Körperaxiome') nach wie vor gelten. Beweisen Sie z.B. das Distributivgesetz

$$(w_1 + w_2)\, w_3 = w_1\, w_3 + w_2\, w_3 , \quad w_i \in \mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]} .$$

b) Warum bezeichnen wir den so konstruierten Zahlenbereich mit $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$? Anders gefragt: Mit welcher (bezüglich der Addition und Multiplikation abgeschlossenen) Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kann man $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ identifizieren? Welches Element $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ entspricht der Zahl $\sqrt{2}$? Schreiben Sie $x = (x_1, x_2)$ in konventioneller Weise als reelle Zahl unter Verwendung der Zahl $\sqrt{2}$.

c) Geben Sie die Formel für die *Division* $w_1/w_2 = (x_1, x_2)/(y_1, y_2)$ in $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ an ($w_2 \neq (0, 0)$).

Anmerkung: Jetzt könnten wir noch $\sqrt{3}$ 'dazugeben', dann wird das Ganze dreidimensional, usw.

In formal ähnlicher Weise werden die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Paare reeller Zahlen konstruiert (siehe Analysis II).

---

[2]'Identifikation' ist im Sinne einer Bijektion zu verstehen, wobei auch die Rechenregeln äquivalent sind, was hier offensichtlich der Fall ist. Man spricht dann auch von 'Isomorphie'.

1. Für eine endliche Menge A ist die Mächtigkeit $|A|$ definiert als die Anzahl der Elemente von A.

a) Zeigen Sie, dass für beliebige endliche Mengen A, B und C gilt,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| .$$

b) $(*)$ Zeigen Sie $|P(A)| = 2^{|A|}$ für jede endliche Menge A, wobei $P(A)$ die Potenzmenge (= die Menge aller Teilmengen) von A ist.

2. a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, bijektiv ist.

b) Gegeben seien die Funktionen $g(x) = \sqrt{2-x^2}$ und $h(x) = \frac{1}{1-x}$.
– Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von g und h.
– Bestimmen Sie $g \circ h$ und $h \circ g$ zusammen mit ihren maximalen reellen Definitionsbereichen.

3. Welche der folgenden Funktionen $f : D \to B$ sind injektiv, surjektiv, bijektiv? Wie muss man den Definitionsbereich D gegebenenfalls einschränken, damit f injektiv wird? Wie muss man den Bildbereich eventuell verändern, damit f surjektiv wird? Bestimmen Sie auch die Umkehrfunktionen der durch geeignete Einschränkungen hervorgehenden bijektiven Funktionen.

a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$, $\quad B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \frac{3+2x}{1-x}$,
b) $D = B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^2\,|x|$.

4. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ mit $a_n = \frac{n-2}{n+1}$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - 1| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt, für

a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, **b)** $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

5. Untersuchen Sie die angegebenen Folgen (a_n), (b_n), (c_n) und (d_n) auf Konvergenz:

$$a_n = \frac{n^2}{n^3-2}, \qquad b_n = \frac{n^3-2}{n^2},$$

$$c_n = n - 1, \qquad d_n = b_n - c_n .$$

Geben Sie im Fall der Konvergenz auch den Grenzwert der Folge an.

6. a) Stellen Sie eine Vermutung auf, wie eine explizite Darstellung der rekursiv gegebenen Folge (a_n) aussieht:

$$a_{n+1} = 2\,a_n + 3\,a_{n-1}, \quad \text{mit den Startwerten} \quad a_1 = 1,\ a_2 = 3,$$

und weisen Sie ihre Korrektheit mittels vollständiger Induktion nach.[1]
Hinweis: Berechnen Sie einige Folgenglieder.

b) $(*)$ Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_1 = 0, \quad \text{und} \quad a_n = \frac{1}{2-a_{n-1}} \quad \text{für } n \geq 2$$

nach unten durch 0 und nach oben durch 1 beschränkt ist und dass sie streng monoton wachsend ist. Ist die Folge konvergent? Wie lautet ihr Grenzwert?[2]

[1] Der Induktionsanfang bezieht sich auf $n = 3$, wobei die gewählten Startwerte a_1, a_2 eingehen. Für derartige Rekursionen kann man übrigens die allgemeine Gestalt der Lösungen und konkrete Lösungen für beliebige Startwerte angeben. Dies ist jedoch nicht Thema dieser Aufgabe.

[2] Im Gegensatz zu Aufgabe 6 ist dies eine *nichtlineare* Rekursion, d.h., a_n hängt in nichtlinearer Weise von a_{n-1} ab. Das genaue Verhalten der a_n hängt hier vom gewählten Startwert a_1 ab. Für andere Startwerte ist z.B. im allgemeinen die Monotonie verletzt.

7. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Eine Folge konvergiert, falls sie monoton und beschränkt ist.

b) Eine konvergente Folge ist monoton und beschränkt.

c) Wenn eine Folge nicht monoton ist, kann sie nicht konvergieren.

d) Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, kann sie nicht konvergieren.

e) (∗) Wenn es eine Lösung zur Fixpunktgleichung einer rekursiv definierten Folge gibt, so konvergiert die Folge gegen diesen Wert.

Hinweis: Für eine durch ein rekursives Gesetz der Form $a_n = f(a_{n-1})$ definierte Folge bezeichnet die man die Gleichung $a = f(a)$ als die zugehörige Fixpunktgleichung.

8. Zeigen Sie, dass für zwei beliebige positive Zahlen $x, y > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + y^n} = \max\{x, y\}\,.$$

Hinweis: Schätzen Sie die Folgenglieder nach unten und oben durch Terme ab, in denen nur die größere der beiden Zahlen vorkommt, und verwenden Sie das Einschließungsprinzip.

9. Zeigen Sie für $p \in \mathbb{N}$ und $|q| < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} n^p\, q^n = 0\,.$

Hinweis: Bilden Sie die n-te Wurzel der Beträge der Folgenglieder.

10. Bestimmen Sie für die angegebenen Folgen (a_n), (b_n) und (c_n) mit $n \in \mathbb{N}$ jeweils

– Supremum, Infimum, sowie

– (∗) Limes Superior und Limes Inferior,

falls diese Zahlen existieren.

a) $a_n = 1 + (-1)^n + n^{-\frac{1}{2}}\,,$

b) $b_n = \begin{cases} \frac{k-1}{k}\,, & n = 3\,k \\ \frac{1}{k+1}\,, & n = 3\,k-1 \\ -\frac{1}{k^2}\,, & n = 3\,k-2 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}),$

c) $c_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}\,.$

Hinweis: 'Limes Superior' bzw. 'Limes Inferior' sind definiert als

$$\limsup_{n\to\infty}\,\{a_n\} := \lim_{n\to\infty}\ \sup_{k\geq n}\,\{a_k\}\,, \qquad \liminf_{n\to\infty}\,\{a_n\} := \lim_{n\to\infty}\ \inf_{k\geq n}\,\{a_k\}\,,$$

sofern diese Grenzwerte existieren. Für beliebige (a_n) ist $(S_n) = \sup\limits_{k\geq n}\{a_k\}$ monoton fallend und $(I_n) = \inf\limits_{k\geq n}\{a_k\}$ monoton wachsend. Daher gilt auch

$$\limsup_{n\to\infty}\,\{a_n\} = \inf_{n\to\infty}\ \sup_{k\geq n}\,\{a_k\}\,, \qquad \liminf_{n\to\infty}\,\{a_n\} = \sup_{n\to\infty}\ \inf_{k\geq n}\,\{a_k\}\,.$$

Es mag sein, dass du dich nicht für Mathematik interessierst,
aber die Mathematik interessiert sich für dich.

1. Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} x^{-k}\Big) \quad (|x|>1)$$

2. Fortsetzung von UE 1, Aufgabe 3c): Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 := q, \quad a_n := p\,a_{n-1} + q\,, \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

mit $p \in [0,1]$ und $q \geq 0$. (Interpretation: Abnahme einer Population a_n um einen Faktor p von Schritt zu Schritt, plus Zuwachs q durch Migration in jedem Schritt.)

a) Geben Sie in ähnlicher Weise wie für UE 1, 3c), eine explizite Formel für die a_n an.

b) Berechnen Sie den 'asymptotischen Zustand' $a_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

– unter Verwendung der Lösungsdarstellung aus a),

– ohne Verwendung von a),

für diejenigen Werte von p, für die dieser Limes existiert.

3. (*) (Bedingte) Konvergenz eines Pfades in der Ebene:

Ein punktförmiges Tierchen (nennen wir es Bello) krabbelt in der (x,y)-Ebene herum, ausgehend vom Nullpunkt $(x_0,y_0)=(0,0)$ entlang horizontaler und vertikaler Geradenstücke: Zunächst

- 1 mm nach rechts,
- dann 1/2 mm nach oben,
- dann 1/3 mm nach links,
- dann 1/4 mm nach unten;

weiters

- 1/5 mm nach rechts,
- dann 1/6 mm nach oben,
- dann 1/7 mm nach links,
- dann 1/8 mm nach unten;

usw. Diesen Prozess denken wir uns bis ins Unendliche fortgesetzt. Mit (x_n,y_n) bezeichnen wir die Position von Bello nach n Schritten.

a) Überlegen Sie, wie weit sich Bello maximal vom Nullpunkt entfernt.

b) Drücken Sie x_n und y_n mittels n-abhängiger Summen $\sum\limits_{k=\cdots}^{\cdots}$ aus.

c) Da sich Bello nicht beliebig weit von seiner Startposition entfernt, sind diese Summen (Reihen) für $n\to\infty$ offensichtlich konvergent. Weisen Sie dies mathematisch rigoros nach. Sind diese Reihen absolut oder bedingt konvergent?

Anmerkung: Den Limes $(x_\infty,y_\infty) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n)$, d.h. den Limes der Position von Bello für $n\to\infty$, werden wir später mit Werkzeugen aus der Differentialrechnung bestimmen.

d) Angenommen, Bello krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit v mm/s. Mit t_n bezeichnen wir die Zeit, die nach n Schritten vergangen ist. Charakterisieren Sie das Konvergenzverhalten der Folge (t_n) für $n \to \infty$.

e) Angenommen, Bello beschleunigt während seiner Reise, d.h. er startet mit Geschwindigkeit v mm/s und verdoppelt seine Geschwindigkeit nach jedem Schritt. Wiederum bezeichnen wir mit t_n die Zeit, die nach n Schritten vergangen ist. Charakterisieren Sie das Konvergenzverhalten der Folge (t_n) für $n \to \infty$. Geben Sie (im Fall der Konvergenz) eine obere Schranke für $t_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} t_n$ an.

4. Fortsetzung von Aufgabe 3:

Geben Sie eine Abschätzung dafür an, wie weit Bello nach n Schritten noch von seinem Ziel (x_∞, y_∞) entfernt ist.

5. Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Kriteriums, dass die Reihe konvergiert.

b) Berechnen Sie den Wert der Reihe.

6. Die Werte $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ bezeichnet man als *Harmonische Zahlen.* Bekanntlich gilt $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \infty$ (Harmonische Reihe). Wie steht es um die Konvergenz der Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H_n}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n H_n \quad (|q| < 1)$?

7. *Partielle Summation* (ein diskretes Analogon zur partiellen Integration):

a) Gegeben seien zwei Folgen (a_n) und (b_n). Schreiben Sie den Ausdruck

$$a_{n+1}\, b_{n+1} - a_1\, b_1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

in Form einer Teleskopsumme, und beweisen Sie davon ausgehend die Formel für die partielle Summation,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)\, b_k \;=\; a_{n+1}\, b_{n+1} - a_1\, b_1 \;-\; \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\,(b_{k+1} - b_k)\,.$$

b) Falls $(a_n\, b_n)$ eine Nullfolge ist, ergibt sich aus a) rein formal für $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)\, b_k \;=\; -\, a_1\, b_1 \;-\; \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}\,(b_{k+1} - b_k)\,.$$

Ist dann die Konvergenz der Reihe links bzw. rechts gesichert, oder benötigt man dafür zusätzliche Voraussetzungen?

c) $(*)$ Verwenden Sie die Formel für die partielle Summation, um den Wert der verallgemeinerten geometrischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^k$$

zu berechnen. Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Reihe konvergent?

8. (*) Gegeben seien die Folgen $(a_k) = (p^k)$ und $(b_k) = (q^k)$, wobei $|p| < 1$ und $|q| < 1$. Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sind konvergente geometrische Reihen.

a) Bestimmen den Wert der zugehörigen Cauchy'schen Produktreihe auf 2 Arten.

b) Welcher Sonderfall tritt hier auf? Diskutieren Sie diesen separat. (Hinweis: Aufgabe 7c).)

9. $(*)$ Die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x) = e^x$ ist durch die unendliche Reihe

$$e^x \;:=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

definiert; diese ist für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

a) Für $x \neq 0$ ergibt sich durch formale Manipulation der Exponentialreihe:

$$g(x) \;:=\; \frac{e^x - 1}{x} \;=\; 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

Zeigen Sie mathematisch rigoros, dass diese Reihendarstellung für $g(x)$ korrekt ist.

b) Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck '$g(0) = 0/0$'. Setzt man andererseits in der Reihendarstellung für $g(x)$ den Wert $x = 0$ ein, so ergibt sich der Wert 1. Es ist naheliegend, daraus zu schließen, dass $g(x)$ an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit besitzt, mit $g(0) = \lim_{x \to 0} g(x) = 1$. Diese Argumentation muss jedoch genau begründet werden.

Beweisen Sie $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$, indem Sie

$$\lim_{x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \;=\; 1 \quad \text{bzw. dazu äquivalent:} \quad \lim_{x \to 0} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \;-1 \Big) \;=\; 0$$

nachweisen. Schreiben Sie zu diesem Zweck den rechten Ausdruck $\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \ldots -1 \Big)$ wiederum als Reihe an, geben Sie dafür eine konvergente Majorante an, und zeigen Sie, dass deren Wert für $x \to 0$ tatsächlich gegen 0 konvergiert.

10. Gegeben sei die Funktion $f\colon\ (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{1 + x^p} \;-1}{x}\,, \quad p > 0\,.$$

Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck '$f(0) = 0/0'$.

a) Untersuchen Sie, für welche $p > 0$ an der Stelle $x = 0$ eine hebbare rechtsseitige Unstetigkeit vorliegt, d.h. wann der Limes

$$\lim_{x \to 0+} f(x)$$

existiert, und berechnen Sie diesen Limes in Abhängigkeit von p. (Hinweis: Umformen.)

b) Für $p \geq 1$ kann man auch so vorgehen: Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sqrt{1 + c} \;<\; 1 + \frac{c}{2} \quad \text{für} \quad c > 0\,,$$

und versuchen Sie so die Existenz von $\lim_{x \to 0+} f(x)$ für $p \geq 1$ nachzuweisen. Kann darauf basierend den Limes ebenfalls berechnen?

1. Formulieren Sie basierend auf der ε-δ - Definition der Stetigkeit

a) die Aussage, dass eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ nicht stetig ist,

b) die Aussage, dass f auf D nicht gleichmäßig stetig ist;

c) weiters die Aussage, dass f auf D nicht Lipschitz-stetig ist.

2. Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sind richtig, und welche sind falsch?

a) f ist stetig, falls für jedes $\hat{x} \in (a,b)$ der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to \hat{x}-} f(x)$ mit dem rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \to \hat{x}+} f(x)$ übereinstimmt.

b) f ist stetig, falls für jedes $\hat{x} \in (a,b)$ der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \hat{x}} f(x)$ existiert.

c) Falls f stetig ist, ist f auch beschränkt.

d) Falls f stetig ist und eine Nullstelle besitzt, aber nicht die Nullfunktion ist, dann gibt es Stellen $x_1,\, x_2 \in (a,b)$ mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$.

e) Falls f stetig und monoton ist, wird jeder Wert aus dem Bild von f an genau einer Stelle angenommen.

Hinweis: Wenn Sie vermuten, dass eine Aussage falsch ist, versuchen Sie ein explizites Gegenbeispiel zu konstruieren.

3. **a)** An welchen Stellen ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \left(\frac{\operatorname{sign}(x)}{x-5}\right)^2$$

stetig bzw. unstetig?

b) Zeigen Sie: Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig.

c) Zeigen Sie: Jedes Polynom ist auf jedem beschränkten Intervall $[a,b]$ Lipschitz-stetig.

4. Zeigen Sie: Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig, siehe Skriptum. Vollziehen Sie den Beweis nach und argumentieren Sie, dass gilt: Es gibt eine Konstante $H > 0$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \;\le\; H\,|x_1 - x_2|^\kappa \quad \text{für alle } \; x_1, x_2 \in [0,1],$$

mit $H > 0$ und $\kappa \in (0,1]$. Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Hölder-Stetigkeit.* Wie lauten die Konstanten H und κ ?

Anmerkung: Hölder-Stetigkeit mit $\kappa = 1$ bedeutet Lipschitz-Stetigkeit (mit $L = H$). Jede Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig (warum?).

5. Wie ist jeweils der Parameter $c \in \mathbb{R}$ zu wählen, damit die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ stetig sind?

a) $D = [-1,1], \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2\,x - 3}{x^2 + x - 2}\,, & x \neq 1 \\ c\,, & x = 1 \end{cases}$

b) $D = (0,1], \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6}{x^3 - x}\,, & x \neq 1 \\ c\,, & x = 1 \end{cases}$

6. Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ besitzt in $[a,b]$ mindestens einen *Fixpunkt* $x^* \in [a,b]$, d.h. $x^* \in [a,b]$ mit der Eigenschaft $x^* = f(x^*)$.

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g(x) = x - f(x)$ an.

b) f sei sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$ (eine sogenannte *Kontraktion*). Zeigen Sie: Der Fixpunkt x^* ist eindeutig. Geben Sie auch ein konkretes Beispiel an.

7. (*) Gegeben sei eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der folgenden Zwischenwerteigenschaft: Sind y_1, $y_2 \in f([a,b])$, so ist $y \in f([a,b])$ für jedes y zwischen y_1 und y_2. Ist f notwendigerweise stetig?

Hinweis: Überlegen Sie, ob eine Funktion mit einer typischen Unstetigkeit die Eigenschaft erfüllen kann.

8. (*) Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Für alle $x \in (a,b)$ gebe es ein $\xi \in (x,b]$ mit $f(\xi) > f(x)$. Für $x = a$ soll dies nicht gelten. Zeigen Sie, dass $f(x) \le f(b)$ für alle $x \in (a,b)$ gilt, sowie $f(a) = f(b)$.

9. Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + a\,x + 6}{(x-2)^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 4\,x + a}{x^2 - 1}$

10. Ein Anwendungsproblem:

Martin wandert in vier Stunden am Vormittag von Adorf nach Bstadt (stellen Sie sich eine geradlinig verlaufende Straße vor, aber das ist im Prinzip egal). In Bstadt macht er Mittagspause. Am Nachmittag wandert er in vier Stunden wieder nach Adorf zurück.

a) Zeigen Sie: Es gibt mindestens eine Stelle x^* zwischen Adorf und Bstadt, die er auf beiden Wanderungen nach der gleichen Zeitspanne t^* erreicht.

b) Angenommen, Martin geht immer nur vorwärts in Richtung seines Zieles, d.h. er kehrt nie um und bleibt nie stehen. Zeigen Sie: t^* und x^* sind eindeutig.

c) Angenommen Martin legt auf dem Hinweg oder/und auf dem Rückweg zwischendurch eine Pause ein (3 Möglichkeiten). In welchen Fällen bleibt die Aussage aus b) bezüglich der Eindeutigkeit von t^* bzw. von x^* sicher richtig und wann nicht?

Anmerkung: Martin wird als punktförmiges Subjekt betrachtet (sozusagen als Massepunkt), das sich aus energetischen Gründen nur stetig bewegen kann. Adorf und Bstadt stellen wir uns als „Punkte auf der Landkarte“ vor. Skizzen sind hilfreich für die Lösung.

Die fortschreitende Mathematik hat den Vorteil, dass man sich genauer irren kann.

Anmerkung: Die Aufgaben $3, 5$ und 10c) löst man sinnvollerweise mit Rechnerunterstützung. Manche der Aufgaben (z.B. $4, 6, 7$ und 10b)) wären mittels Methoden aus späteren Kapiteln (Differentialrechnung) direkter einer Lösung zugänglich; sie sollen hier jedoch hier ohne Zuhilfenahme derartiger Methoden gelöst werden.

1. Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$:

a) $x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18$

b) $x^3 + x^2 - q^2\,x - q^2,\ q \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von q treten mehrfache Nullstellen (doppelt, dreifach) auf?

Hinweis: Erraten sie jeweils eine der Nullstellen.

2. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

a) $\dfrac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18}$ **b)** $\dfrac{x}{x^3 + x^2 - q^2\,x - q^2}\ ,\ q \in \mathbb{R}$

Zu b): Berücksichtigen Sie Sonderfälle (spezielle Werte von q).

3. Man bestimme das jeweilige eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0 \ldots 3\}$ (mit $c \in \mathbb{R}$):

a) $\{\,(-2,+c),\ (-1,+c),\ (+1,+c),\ (+2,+c)\,\}$

b) $\{\,(-2,+c),\ (-1,-c),\ (+1,-c),\ (+2,+c)\,\}$

c) $\{\,(-2,+c),\ (-1,-c),\ (+1,+c),\ (+2,-c)\,\}$

d) $\{\,(-2,+c),\ (-1,-c),\ (+1,-c),\ (+2,-c)\,\}$

$+$ Auswertung an $x = 0$.

4. Gegeben sei die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+\,,\ f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

a) Zeigen Sie: $f(x)$ ist auf $(0,1)$ und auf $(1,\infty)$ streng monoton. Wo ist f fallend, wo wachsend?

b) Wie lautet der Wert von $\min\limits_{x \in \mathbb{R}_+} f(x)$?

c) Wie in a), b), aber für $g(x) = \exp(f(x))$.

d) Wie in a), b), aber für $g(x) = \big(f(x)\big)^{-2}$.

5. Überlegen Sie sich basierend auf der Definition der Euler'schen Zahl e eine Funktion $f(t)$, für die gilt

$$\lim_{t \to 0+} f(t) = e\,,$$

wobei jedoch $f(0)$ nicht direkt auswertbar ist (hebbare Unstetigkeit). Approximieren Sie nun e numerisch, indem Sie $f(t)$ an den Stellen $t = 0.1,\ 0.2,\ 0.3$ durch ein Polynom vom Grad 2 interpolieren und an der Stelle $t = 0$ auswerten.

Anmerkung: Eine derartige Vorgangsweise wird als *Extrapolation* bezeichnet und leistet in vielen anderen Zusammenhängen nützliche Dienste. Die hier berechnete Approximation von e ist jedoch nicht besonders genau. Wie könnte man sie verbessern? (Man kann auch Fehlerabschätzungen angeben, dies ist jedoch nicht Teil dieser Aufgabe.)

6. a) (*) Der Beginn der Exponentialreihe, mit festem $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x \;=\; \exp(x) \;\approx\; E_n(x) \;:=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

liefert eine Approximation für e^x, die für 'kleines' x sinnvoll ist (immer genauer für immer kleineres $|x|$). [1] Für $x < 0$ handelt es sich um eine alternierende Reihe. Geben Sie für den Fall $x < 0$ eine rigorose Abschätzung für den Fehler $|E_n(x) - e^x|$ in Abhängigkeit von x an.

Anmerkung: Eine sehr ähnliche Fehlerabschätzung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ (in VO: später).

b) Eine zeitabhängige Größe $X = X(t)$ gehorche dem Gesetz $X(t) = C\,e^{\lambda t}$, $t \geq 0$, mit $C > 0$ und der Abklingrate $\lambda < 0$. (Falls wir z.B. die Zeit in Stunden [h] messen, dann hat λ die Dimension 'pro Stunde', also $[\mathrm{h}^{-1}]$.)

Der Anfangswert C und die Abklingrate λ seien unbekannt, aber bekannt sind Messwerte $0 < X_1 = X(t_1)$ und $0 < X_2 = X(t_2) < X_1$ zu zwei Zeitpunkten $t_2 > t_1 > 0$. Geben Sie Formelausdrücke an (in Abhängigkeit von t_1, t_2, X_1, X_2) für die Werte von C, λ und für die betreffende Halbwertzeit $T_{1/2}$. Stellen Sie C in der Form $C = X_1^{\gamma_1} + X_2^{\gamma_2}$ dar, mit geeigneten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

7. a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Exponentialfunktion den Limes

$$\lim_{x \to 0} \, (\ln(1+x) - x)$$

b) Wir werten die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ am Rechner aus, für $x = 10^{-1}$, 10^{-2}, 10^{-3}, usw. Hier eine Tabelle der auf 10 Dezimalstellen exakt gerundeten Werte:

```
   x       f(x) = ln(1+x)
-----------------------------
  1e-01   0.95310179804e-01
  1e-02   0.99503308532e-02
  1e-03   0.99950033308e-03
  1e-04   0.99995000333e-04
  1e-05   0.99999500003e-05
  1e-06   0.99999950000e-05
  1e-07   0.99999995000e-07
  1e-08   0.99999999500e-08
  1e-09   0.99999999950e-09
  1e-10   0.99999999995e-10
```

Versuchen Sie aufgrund der Tabelle zu erkennen, welches quadratische Polynom $q(x)$ für kleine x offenbar eine sehr gute Approximation von $f(x)$ darstellt.

c) Die Relation $\ln(1+x) \approx q(x)$ ($q(x)$ aus b)) kann man auch schreiben als $\exp(q(x)) \approx 1 + x$. Entwicklen Sie $\exp(q(x))$ in eine Reihe, d.h., bestimmen Sie die ersten Terme dieser Entwicklung und vergleichen diese mit $1 + x$. Was sieht man?

Anmerkung: Diese Überlegung ermöglicht es Ihnen auch, die Koeffizienten von $q(x)$ zu ermitteln, falls Sie diese anhand der Tabelle nicht identifizieren konnten.

[1] Für Werte x weiter weg von 0 ist das eine sehr ineffiziente Approximationsmethode für e^x. Man müsste n sehr groß wählen, was auch zu einem *computational disaster* führt (Rundungsfehler am Computer machen die Approximation kaputt). Es gibt wesentlich bessere Verfahren.

8. a) Zeigen Sie: $|\cos(x+\varepsilon) - \cos x| \;\leq\; \sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos\varepsilon}$

Anmerkung/Hinweis: Dadurch kann man z.B. den Effekt einer kleinen Störung ε des Winkels x auf den Wert des Cosinus abschätzen.

Zum Beweis greife man auf die berühmte *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung* zurück (die in 'Lineare Algebra' bewiesen wird), und zwar in der vereinfachten Variante

$$|\,a_1\,b_1 + a_2\,b_2\,| \;\leq\; \sqrt{a_1^2+a_2^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

Anmerkung: Die Abschätzung ist nicht 100 % 'scharf', sie gilt jedoch für beliebige x und ε.

b) Beweisen Sie die trigonometrischen Identitäten:

$$\text{(i)}\quad \sin 2x \;=\; \frac{2\,\tan x}{1+\tan^2 x}\,, \qquad \text{(ii)}\quad \cos 2x \;=\; \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\,.$$

c) Zeigen Sie:

$$\arcsin\xi + \arcsin\eta \;=\; \arcsin\left(\xi\sqrt{1-\eta^2} + \eta\,\sqrt{1-\xi^2}\right) \quad \text{für} \quad \xi^2+\eta^2 \leq 1\,.$$

9. a) Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen sinh und cosh nach:

$$\begin{aligned} \sinh(x\pm y) &= \sinh x\,\cosh y \pm \cosh x\,\sinh y \\ \cosh(x\pm y) &= \cosh x\,\cosh y \pm \sinh x\,\sinh y \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: $\sinh x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

10. (*) Um die Entfernung eines Meteoriten M von der Erde zu messen, wird dieser von zwei verschiedenen Stellen A und B aus angepeilt. Sei $l = \overline{AB}$ der (bekannte) Abstand zwischen A und B. Die drei Punkte A, B und M liegen auf einem Dreieck in einer gemeinsamen Ebene, und gemessen werden die Winkel α, β zwischen den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AM}$ bzw. zwischen $\overline{AB}$ und $\overline{BM}$.

a) Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass wir a priori wissen, dass das Dreieck ABM gleichschenkelig ist, d.h., wir benötigen nur eine Messung für $\alpha = \beta$.
Wie weit ist M von A entfernt?

b) Eine derartige Messung ist unvermeidlicherweise fehlerbehaftet, d.h., der gemessene Wert ist $\tilde{\alpha} = \alpha\,(1+\varepsilon)$ mit einem kleinen relativen Messfehler $\varepsilon = \frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\alpha}$.

Geben Sie eine Schätzung dafür an, wie stark sich dieser Messfehler auf den daraus errechneten Abstand $L = \overline{AM}$ auswirkt (in Abhängigkeit von l, α und ε.) Schreiben Sie dies in der Form $\tilde{L} = L\,(1+\delta)$ mit dem relativen Fehlereffekt δ.

Hinweis: Verwenden Sie die Näherungen $\cos x \approx 1$ und $\sin x \approx x$ für kleine Winkel x und vernachlässigen Sie Terme der Größenordnung ε^2.

c) Rechnen Sie a), b) numerisch durch für $l = \overline{AB} = 100\,\text{km}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ (1 %), 10^{-3} (0.1 %), und unter der Annahme $\alpha = 89°$.

1. Zeigen Sie

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(e^x \sin x\big) \;=\; \big(\sqrt{2}\big)^n\, e^x \sin\big(x + \frac{n\,\pi}{4}\big) \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem für den Sinus, um einen Ausdruck der Gestalt $\sin y + \cos y$ in der Form $C\sin(y+\varphi)$ darzustellen. $(C, \varphi \;=\; ?)$

2. a) Leiten Sie die Formel die Ableitung des Sinus her, $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, und zwar mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion, indem Sie von der Formel für die Ableitung von arcsin ausgehen.

b) Berechnen Sie jeweils die Gleichung der Tangente an die Kurve $(x, f(x))$ (Graph der Funktion f) an der Stelle $(x_0, f(x_0))$:

(i) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\,,\quad x_0 = -\frac{1}{2}\,;$ (ii) $f(x) = x\,\ln x\,,\quad x_0 = e$

c) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$ jene Intervalle, auf denen sie monoton ist, und geben sie ein möglichst großes Intervall an, auf dem f Lipschitz-stetig ist. Wie lautet die zugehörige optimale (kleinstmögliche) Lipschitzkonstante?

3. Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ folgender Funktionen:

a) $f(x) = \Big(x + \dfrac{1}{x}\Big)^2\,,\quad x \neq 0$

b) $f(x) = \cos(x^2)\cos^2 x\,,\quad x \in \mathbb{R}$

c) $\ln\Big(\dfrac{e^x - 1}{e^x}\Big)\,,\quad x \neq 0$

d) $\dfrac{1}{\big(g(x^k)\big)^n}\,,\quad k, n \in \mathbb{N}$

(In d) ist g irgendeine gegebene differenzierbare Funktion.)

4. Zeigen Sie, dass die beiden Ungleichungen

$$\frac{\pi}{4} \;\leq\; \arctan(x) + \frac{1-x}{1+x^2} \;\leq\; \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \geq 0$ gelten.

Hinweis: Analysieren Sie den Verlauf des Funktionsausdruckes in der Mitte für $x \in \mathbb{R}_0^+$.

5. Berechnen Sie die Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cot x \,\arcsin x$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}\,,\quad a \in \mathbb{R}^+,\; a \neq 1$

6. Bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\,, & x \neq 0 \\ c\,, & x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

7. Der Widerstand R eines Schwingkreises mit der Kapazität $C = 20$ und Induktivität $L = 5$ ist zu bestimmen. Dazu wird die Kreisfrequenz ω gemessen. Der gemessene Wert sei $\omega = 7$, mit einer Genauigkeit von $\pm 1\%$.

Was ist der Wert von $R = \dfrac{1}{\omega\, C - 1/(\omega L)}$, und welchen relativen Fehler (in %) erwarten Sie bei der Auswertung von R aufgrund der Unsicherheit in der Messung von ω ?

8. Bestimmen Sie k derart, dass

a) $\sqrt{2\,x^2 - 1} \;=\; k\,x + O(1), \quad x \to \infty$ **b)** $\big(\,1 + x^2\,\big)^{-1/2} \;=\; 1 + k\,x^2 + O(x^4), \quad x \to 0$

Hinweis: Substituiere Sie die Variable x in geeigneter Weise, so dass Sie eine Funktion erhalten, die Sie an 0 linearisieren können.

9. Ermitteln Sie für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3\,x^2 - 4}{x^2 + 2\,x - 3}$$

den maximalen Definitionsbereich und bestimmen Sie die Art der Unstetigkeitsstellen. Finden Sie die Nullstellen und untersuchen Sie den Charakter der Extrema. Untersuchen Sie weiters das Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Stellen Sie die Geradengleichung der Asymptoten auf und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

10. (*) Herr DDDr. Bellmann steht an der Stelle $(0,0)$ in der xy - Ebene, sein Hund Bello wartet links neben ihm irgendwo auf der x - Achse. DDDr. Bellmann geht mit konstanter Geschwindigkeit v_B in y - Richtung los und spaziert die positive y - Achse entlang. Bello läuft mit konstanter Geschwindigkeit v_b hinterher, und zwar so, dass der Hundegeschwindigkeitsvektor zu jedem Zeitpunkt genau dorthin zeigt, wo sich DDDr. Bellmann gerade befindet. (Bello ist ein sehr treuer Hund.)

Zeigen Sie, dass Bellos Bahnkurve $y = b(x)$ in der xy - Ebene der folgenden nichtlinearen Differentialgleichung genügt: [1]

$$\frac{v_b}{v_B}\, x\, b''(x) + \sqrt{1 + (b'(x))^2} \;=\; 0\,.$$

Hinweis: Machen Sie eine Skizze. Überlegen Sie zunächst aufgrund der Angabe ('treuer Hund') einen Zusammenhang zwischen der Hundeabszisse x, der Hundeordinate $b(x)$ und der zugehörigen Position B von DDDr. Bellmann auf der y - Achse. Schreiben dies in der Form $B - b(x) = \ldots$; diese Identität gilt für alle $x = x(t)$ und die zugehörigen $B = B(t)$. Leiten Sie dann eine Identität zwischen $x(t)$ und $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\, x(t)$ her, die aus der Angabe über die Hundedynamik folgt. (Wie der Hundegeschwindigkeitsvektor darzustellen ist, wissen Sie aus 'PM I'.) Überlegen Sie weiter.

[1] Die sogenannte Bellmann-Gleichung (© Grobian Gans, 1888).

Mathematics is not a deductive science; that's a cliché.
When you try to prove a theorem you don't just list
the hypotheses, and then start to reason.
What you do is trial and error, experimentation, guesswork.

Paul R. Halmos

Die Aufgaben 7 und 9 benötigen Rechnerunterstützung, genau genommen auch Aufgabe 4. Letztere ist gedacht als Unterhaltung zwischendurch für die **hoffentlich erholsamen Weihnachtsferien** (das wünschen wir Ihnen!). Viel lustiger als Kreuzworträtsel lösen und auch trickreicher. Beachten Sie die Hinweise. (Die Vorbereitung auf den 2. Test, Stoff UE 3–6, ist natürlich vorrangig.)

1. a) Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{p\,x}}{1 - e^{q\,x}} \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

auf zwei Arten: einmal mit Hilfe geometrischer Summen und einmal mit Hilfe der Differentialrechnung.

b) Bestimmen Sie den gleichen Limes für beliebiges $p, q \in \mathbb{R}$ $(q \neq 0)$.

2. Die *Bernstein-Polynome* $B_{k,n}(x)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ sind definiert als

$$B_{k,n}(x) \;:=\; \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}\,, \quad k = 0 \ldots n\,.$$

a) Zeigen Sie, ohne die Ableitung $B'_{n,k}(x)$ zu berechnen: Für $0 < k < n$ gibt es eine Stelle $\xi \in (0,1)$ mit $B'_{n,k}(\xi) = 0$.

b) Zeigen Sie, indem Sie Ableitung $B'_{n,k}(x)$ berechnen: Für $0 < k < n$ gibt es *genau eine* Stelle $\xi \in (0,1)$ mit $B'_{n,k}(\xi) = 0$. Wo befindet sich diese Stelle? Welcher Typ von Punkt liegt hier vor?

c) Wie ist das Verhalten für $k = 0$ und $k = n$?

Anmerkung: Der Normierungsfaktor $\binom{n}{k}$ ist für diese Aufgabe unwesentlich. (Er ist so gewählt, dass gilt $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(t) \equiv 1$, eine sogenannte *Zerlegung der Eins.*)

3. (*) Beweisen Sie die Ungleichung

$$a\,b \;\leq\; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

für alle $a, b \geq 0$, wobei $p > 1$ und q der zu p 'konjugierte' Exponent, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$

Hinweis: Halten Sie $b \geq 0$ beliebig fest und analysieren Sie die Funktion $f(a) := \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - a\,b\,.$ Sehen Sie sich die Nullstelle von f' an.

4. (**) [vgl UE 3:] Führen Sie für die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}\,,$

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{1 + x^p}\; - 1}{x}\,, \quad p > 0\,,$$

eine Kurvendiskussion in Abhängigkeit des Parameters p durch.

Berechnen Sie auch zunächst nochmals $\lim_{x \to 0+} f(x)$ mittels einer anderen Methode als in UE 3. Untersuchen Sie auch die Asymptotik für $x \to \infty$.

Hinweis: Für den Spezialfall $p = 1$ ist $f(x)$ ist an $x = 0$ rechtsseitig stetig fortsetzbar. Um $\lim_{x \to 0+} f'(x)$ zu bestimmen, schreibt man $f'(x)$ als Quotient und wendet zweimal die Regel von de l'Hospital an.

Auch die Bestimmung der Nullstelle von f' ist nicht ganz einfach. Hinweis: Substituiere $\sqrt{1+x^p} = u$. Für welche p existiert eine positive Lösung x?

Auf die Bestimmung allfälliger Wendepunkte verzichten wir – das wäre noch aufwendiger.

Anmerkung: Diese Aufgabe ist per Hand eher mühevoll zu lösen. Mit Unterstützung durch ein Formelmanipulationssystem am Computer geht es sehr gut, weil die Software das Differenzieren und Gleichungslösen übernimmt. Es geht dann darum, die so erhaltenen Ergebnisse richtig zu deuten und, wenn möglich, nachzuvollziehen. Auch die Grafikunterstützung ist sehr nützlich.

5. [Prüfungsbeispiel vom 12.10.2012:] Gegeben Sei die Funktion $f(x) = e^x/e^{(x^2)}$.

a) Führen Sie für f eine komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

b) Zeigen Sie: $g(x) := f(x + \frac{1}{2})$ ist eine gerade Funktion.

6. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $x > 0$ mit

$$\frac{(1+x)^n}{x} < n\,e\,.$$

Geben Sie einen derartigen (von n abhängigen) Wert für x an.

7. *Eine 'inverse Kurvendiskussion' ist eine Aufgabe, bei der man eine Funktion aufgrund vorgegebener Eigenschaften zu konstruieren versucht. Die folgende Aufgabe, ein verallgemeinertes Interpolationsproblem, ist von diesem Typ. Die Aufgabe ist eindeutig lösbar (was allerdings a priori nicht leicht zu erkennen ist).*

Wir basteln eine Sprungschanze, indem wir das Profil des Anlaufs (von der Seite gesehen) als Polynom $p(x)$ vom Grad 5 modellieren. Start oben bei $(x_0, y_0) = (0, 30)$ (der Sprungturm ist 30 m hoch), Absprung bei $(x_1, y_1) = (60, 0)$ (Anlauf ist 60 m lang, waagrecht gemessen). Weiters soll gelten $p'(x_0) = -\frac{1}{2}$, $p'(x_1) = -1/10$ und $p''(x_1) = 0$. Weiters fordern wir $p(120) = -30$, so dass das Polynom $p(x)$ für $x > 60$ auch eine denkbare Flugbahn mit beschreibt.

Stellen Sie das Polynom $p(x)$ auf, das diesem Höhenprofil entspricht (ohne geeignete Softwareunterstützung ist dies jedoch sehr mühevoll, da ein Gleichungssystem in 6 Unbekannten zu lösen ist), und zeichnen Sie seinen Verlauf. Weist das Schanzenprofil einen Wendepunkt auf, und wo befindet er sich?

Hinweis: Einen Wendepunkt von $p(x)$ kennen Sie bereits.

Falls Sie das Problem nicht konkret durchrechnen, überlegen Sie wenigstens, was zu tun wäre.

8. Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$, und $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, d.h., f ist konvex.

a) Zeigen Sie: f hat genau eine Minimalstelle $x^* \in [a,b]$.

b) Schreiben Sie eine Newton-artige Iteration für die numerische Berechnung von x^* an, ausgehend von $x_0 \in (a,b)$. Ist diese sicher wohldefiniert?

c) Ein modifiziertes Verfahren zur Minimumsuche: Sei x_i eine Iterierte. Approximiere $f(x)$ lokal durch sein quadratisches Taylor-Polynom an der Stelle x_i und suche dessen eindeutige (?) Minimalstelle. Dies definiert die neue Iterierte x_{i+1}. Schreiben Sie diese Iteration an. Was erkennen Sie?

9. a) Spezifizieren Sie, wie man mit Hilfe des Newton-Verfahrens die folgenden Werte iterativ approximieren kann:

$$\text{(i)}\ \sqrt[3]{x}\,, \qquad \text{(ii)}\ \frac{1}{x} \qquad \text{für gegebenes } x > 0.$$

Fall (ii) ist eigentlich trivial (warum?). Falls wir jedoch annehmen, dass bei der Newton-Iteration keine Division beteiligt sein darf (sonst wäre das ja eigentlich sinnlos), man also nur mit Additionen/Subtraktionen und Multiplikationen auskommen will (z.B. weil Ihr Hund Bello die Divisionstaste Ihres Rechners gefressen hat), dann muss man es ein bisschen anders machen. Wie funktioniert das?

b) Berechnen Sie (i) $\sqrt[3]{2}$ und, unter Verwendung des so erhaltenen Wertes, (ii) $1/\sqrt[3]{2}$, wobei Sie Taschenrechnergenauigkeit anstreben. Beobachten Sie den Verlauf der Iteration und brechen Sie ab, wenn sich innerhalb dieser Genauigkeit nichts mehr ändert. Wählen Sie als Startwerte für die Newton-Iteration 1.5 (Fall (i)) bzw. 0.5 (Fall (ii)).

10. Betrachten Sie die Riemann-Summe

$$R_h(f) := h \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,, \quad \text{wobei} \quad h = \frac{1}{N}\,, \quad x_i = i\,h\,,$$

für eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Laut Definition des Riemann-Integrals gilt $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} R_h(f)$. Falls das Integral formelmäßig nicht berechenbar ist, kann man $R_h(f)$ für $h > 0$ als numerische Approximation verwenden ('Rechteckregel').

Unter a) – c) betrachten wir zur Übung nur die einfache Funktion $f(x) = x^3$.

a) Berechnen Sie $I(f)$, indem Sie den Grenzwert $\lim_{h \to 0} R_h(f)$ bestimmen.

Hinweis/Anmerkung: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} N^2 (N+1)^2$, wie man mittels vollständiger Induktion nachweist. Sie können dies auch als Teleskopsumme auffassen, indem Sie i^3 in der Form $\frac{1}{4}\big(i^2 (i+1)^2 - (i-1)^2 i^2\big)$ schreiben. Die Teleskopsumme ist das diskrete Analogon zu der Formel $I(f) = \int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}\Big(\frac{x^4}{4}\Big)\,dx = \frac{1}{4}$.

b) Geben Sie für den Fehler $|R_h(f) - I(f)|$ eine Abschätzung in Abhängigkeit von h an. Wie schnell geht der Fehler gegen 0 für $h \to 0$?

c) Wie b), jedoch für die 'Trapezregel' [Skizze]

$$T_h(f) := h \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\,, \quad \text{mit} \quad h = \frac{1}{N}\,, \quad x_i = i\,h\,.$$

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:

a) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Substitution:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ **b)** (*) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

3. Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int \frac{9\,x}{(x-1)^2\,(x+2)}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{2\,x}{x^4+6\,x^2+25}\,dx$

Anmerkung: Lösen Sie **b)** ohne Zuhilfenahme der Partialbruchzerlegung.

4. Betrachten Sie das 'Fourier-Integral'

$$I_n := \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dabei sei $f(x)$ eine mindestens k-mal stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion.

Zeigen Sie folgende Abklingeigenschaft (Verhalten von I_n für $n \to \infty$):

$$|I_n| = \mathcal{O}(n^{-k}) \ \text{ für } \ n \to \infty\,, \quad \text{d.h.} \quad |I_n| \le \frac{C_k}{n^k}$$

mit einer – von f und k abhängigen, jedoch von n unabhängigen – Konstante C_k. Geben Sie eine derartige Konstante C_k an.

Hinweis: partielle Integration.

5. (*) Geben Sie die allgemeine Darstellung, an in Abhängigkeit von $m, n \in \mathbb{N}_0$, für

$$\int_0^1 x^m\,(1-x)^n\,dx$$

6. Untersuchen Sie die beiden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\,\ln x}$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$

7. Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^x-1}$$

nicht existiert. Berechnen Sie den *Cauchyschen Hauptwert*

$$\text{HW}\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{e^x-1} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{e^x-1}\right)$$

8. Betrachten Sie nochmals die beiden Reihen, die sich in Beispiel 3c) vom 3. Übungsblatt aus der Bewegung von Bello in der x-y-Ebene ergeben haben: Für den Limes (x_∞, y_∞) von Bellos Position gilt

a) $x_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ **b)** $y_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$

Berechnen Sie (x_∞, y_∞).

Hinweis: Verwenden Sie die Taylorreihen bezüglich der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ für die Funktionen $\arctan x$ und $\ln(1+x)$, und werten Sie diese an geeigneten Stellen x aus.

9. Das *Integralkriterium* stellt einen Zusammenhang zwischen unendlichen Reihen und uneigentlichen Integralen dar. (Es kann sowohl zum Konvergenznachweis für Reihen als auch für uneigentliche Integrale verwendet werden.)

Sei $m \in \mathbb{N}_0$, und f eine auf $[m, \infty)$ definierte, positive und monoton fallende Funktion. Dann haben

$$\int_m^\infty f(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

das gleiche Konvergenzverhalten, d.h., das uneigentliche Integral links konvergiert genau dann wenn die Reihe rechts konvergiert.

(i) Untersuchen Sie mit Hilfe dieses Kriteriums die Konvergenz der Reihen

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$ **b)** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^\alpha}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$

in Abhängigkeit von dem Parameter α.

Hinweis: Führen Sie den Fall **b)** auf **a)** zurück, indem Sie das entsprechende Integral geeignet substituieren.

(ii) Der Beweis des Integralkriteriums beruht darauf, dass die Reihe einer Riemann-Summe für das Integral entspricht. Im Konvergenzfall gilt auch

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \le \int_m^\infty f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

Geben Sie mit Hilfe dieser beiden Ungleichungen ein Intervall (a, b) an mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \in [a, b]$$

Anmerkung (ohne Beweis:) Der exakte Wert dieser Reihe ist $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$.

10. Bestimmen Sie Potenzreihenentwicklung (Taylorreihe) der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

bezüglich der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$, und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius. Konvergiert die Reihe innerhalb des Konvergenzintervalls gegen die Funktion $f(x)$?

Hinweis: Führen Sie die gesuchte Entwicklung auf eine bereits bekannte Reihe zurück.