Es gibt drei Typen von Aufgaben:

- *'Normale' Aufgaben (ohne (*)) bzw. Unterpunkte davon haben etwa den Charakter von möglichen Testaufgaben. (D.h., tatsächliche Testaufgaben sind ähnlich, aber sie werden natürlich in Umfang und Schwierigkeitsgrad an die zur Verfügung stehende Arbeitszeit angepasst.)*
- $(*)$ *Aufgaben mit (*) dienen der Vertiefung und können ggf. auch etwas schwieriger sein. Auch wenn es sich um keine typischen Testaufgaben handelt, ist die Beschäftigung damit nützlich für das aktive Erarbeiten des relevanten Stoffes.*
- $(**)$ *Kommt manchmal vor. Nicht testrelevant, behandelt stoffliche Erweiterungen, mit ausreichenden Hinweisen für die Lösung.*

1. Das *arithmetische Mittel* bzw. das *geometrische* Mittel zweier positiver Zahlen a, b ist definiert als

$$\frac{a+b}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a\,b}\,.$$

a) Deuten Sie die beiden Begriffe geometrisch.

b) Beweisen Sie

$$\sqrt{a\,b} \le \frac{a+b}{2} \quad \forall\, a, b > 0.$$

In welchen Fällen gilt Gleichheit?

c) Beweisen Sie: Unter allen Rechtecken mit gegebener Fläche A hat das Quadrat mit Fläche A den kleinsten Umfang.

2. $(*)$ Beweisen Sie: *Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element.*

Anmerkung: Die Aussage mag evident erscheinen, aber wie argumentiert man das logisch streng im Fall unendlicher Teilmengen? Führen Sie den Beweis in indirekter Weise.

3. a) Sei $m \le n$. Geben Sie eine Formel für die Summe

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m + q^{m+1} + \ldots + q^n$$

an.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Summe

$$S_n(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{n} (1+\varepsilon)^k$$

ist ein Polynom vom Grad n in dem Parameter ε. Geben Sie die Koeffizienten a_j in der Darstellung

$$S_n(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, \varepsilon^j$$

an.

c) Die Zahlenfolge (a_k) sei rekursiv wie folgt definiert:

$$a_0 \text{ gegeben}; \quad a_n := 2\, a_{n-1} + c_n\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

mit einer gegebenen Folge (c_n). Geben Sie unter Verwendung der geometrischen Summenformel einen expliziten Formelausdruck für die a_n an.

Anmerkung: Die Rekursion beschreibt einen diskreten Wachstumsprozess: a_n ist das Doppelte von a_{n-1} (wie bei einer geometrischen Folge), jeweils noch plus c_n.

Hinweis: Man rechnet einige Werte aus und kann so die allgemeine Gestalt der Lösung vermuten. Dann verifiziert man, dass die vermutete Lösung tatsächlich der gegebenen Rekursion genügt.

4. Beweisen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)\, k = \frac{(n-1)\, n\, (n+1)}{3} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

5. Finden Sie heraus, welchem Bildungsgesetz der Wert der Summe

$$\sum_{k=1}^{n} \left(3\, k^2 - 3\, k + 1\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

gehorcht. Geben Sie aufgrund Ihrer Vermutung einen einfachen Formelausdruck in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ für den Wert der Summe an und beweisen Sie seine Korrektheit.

6. Stellen Sie folgendes Produkt in der einfachst möglichen Weise als Formelausdruck in n dar $(n \in \mathbb{N})$:

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{n}{k}\right)$$

7. $(*)$ Eine Verallgemeinerung des Binomischen Lehrsatzes ist der *Multinomialsatz:*.

Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a_1 + \cdots + a_m)^n = \sum_{k_1 + \cdots + k_m = n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} \prod_{\ell=1}^{m} a_\ell^{k_\ell}, \quad \text{mit} \quad \underbrace{\binom{n}{k_1, \ldots, k_m}}_{\text{Multinomialkoeffizient}} := \frac{n!}{\prod_{\ell=1}^{m} k_\ell\,!}\,.$$

Dabei ist die Summe

$$\sum_{k_1 + \cdots + k_m = n} \cdots$$

so zu verstehen, dass alle möglichen geordneten Tupel[1] $(k_1, \ldots, k_m)$ mit $k_\ell \in \{0, 1, \ldots, n\}$ berücksichtigt werden, deren Summe $k_1 + \cdots + k_m$ genau gleich n ist.

a) Zeigen Sie, dass sich für $m = 2$ genau der Binomische Lehrsatz ergibt.

b) Tabellieren Sie für den Fall $m = 3$ die Multinomialkoeffizienten zu $n = 1, 2, 3$.

c) Geben Sie eine kombinatorische Deutung der Multinomialkoeffizienten an.

[1] Verallgemeinerung des Begriffes ‘geordnetes Paar’

8. Vorbemerkung: Für das kartesische Produkt $A \times A$ schreibt man auch A^2.

a) Sei A eine nichtleere Menge. Wie sieht $A \times \{\,\}$ aus?

b) Seien A und B beliebige Mengen. Zeigen Sie

$$(A \cup B)^2 = A^2 \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup B^2\,.$$

c) Unter welcher Bedingung an A und B gilt $A \times B = B \times A$?

d) Falls A und B disjunkte Mengen sind, d.h. falls sie kein gemeinsames Element haben ($A \cap B = \{\,\}$), schreibt man für die Vereinigungsmenge manchmal auch $A \cup B =: A + B$. Zeigen Sie für diesen Fall

$$(A \cup B)^2 = A^2 + (A \times B) + (B \times A) + B^2\,,$$

insbesondere dass alle 4 rechts auftretenden kartesischen Produkte paarweise disjunkt sind.

9. a) Geben Sie folgende rationale Zahlen in Dezimaldarstellung an:

$$\frac{25}{11} \qquad \frac{25}{12} \qquad \frac{25}{13}$$

b) Wandeln Sie folgende Dezimalzahlen in Brüche um:

$$2.\overline{63} \qquad 2.41\overline{6}$$

10. (∗∗) $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl; es handelt sich als um ein nichttriviales mathematisches Objekt. Man kann jedoch eine formal saubere, rein rationale Erweiterung von $\mathbb{Q}$ angeben, wobei $\sqrt{2}$ einfach 'dazugeschwindelt' wird. Das geht so: Wir betrachten Zahlenpaare $w = (x, y) \in \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und definieren die Rechenregeln

$$\begin{aligned} \text{Addition:} \quad & w_1 + w_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{Q}^2 \\ \text{Multiplikation:} \quad & w_1 \cdot w_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1\, x_2 + 2\, y_1\, y_2, x_1\, y_2 + x_2\, y_1) \in \mathbb{Q}^2 \end{aligned}$$

Die Menge $\mathbb{Q}^2$ gemeinsam mit den so definierten Operationen bezeichnen wir mit $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$. Identifizieren wir[2] die speziellen Elemente der Gestalt $w = (x, 0)$ mit $\mathbb{Q}$, so stellt $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ offensichtlich eine (formal 'zweidimensionale') Erweiterung des rationalen Zahlenbereiches $\mathbb{Q}$ dar.

a) Man kann zeigen, dass in $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ alle Rechengesetze ('Körperaxiome') nach wie vor gelten. Beweisen Sie z.B. das Distributivgesetz

$$(w_1 + w_2)\, w_3 = w_1\, w_3 + w_2\, w_3\,, \quad w_i \in \mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}\,.$$

b) Warum bezeichnen wir den so konstruierten Zahlenbereich mit $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$? Anders gefragt: Mit welcher (bezüglich der Addition und Multiplikation abgeschlossenen) Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ kann man $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ identifizieren? Welches Element $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ entspricht der Zahl $\sqrt{2}$? Schreiben Sie $x = (x_1, x_2)$ in konventioneller Weise als reelle Zahl unter Verwendung der Zahl $\sqrt{2}$.

c) Geben Sie die Formel für die *Division* $w_1/w_2 = (x_1, x_2)/(y_1, y_2)$ in $\mathbb{Q}_{[\sqrt{2}]}$ an ($w_2 \neq (0, 0)$).

Anmerkung: Jetzt könnten wir noch $\sqrt{3}$ 'dazugeben', dann wird das Ganze dreidimensional, usw.

In formal ähnlicher Weise werden die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Paare reeller Zahlen konstruiert (siehe Analysis II).

---

[2] 'Identifikation' ist im Sinne einer Bijektion zu verstehen, wobei auch die Rechenregeln äquivalent sind, was hier offensichtlich der Fall ist. Man spricht dann auch von 'Isomorphie'.