1. Für eine endliche Menge A ist die Mächtigkeit $|A|$ definiert als die Anzahl der Elemente von A.

a) Zeigen Sie, dass für beliebige endliche Mengen A, B und C gilt,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\,.$$

b) $(*)$ Zeigen Sie $|P(A)| = 2^{|A|}$ für jede endliche Menge A, wobei $P(A)$ die Potenzmenge (= die Menge aller Teilmengen) von A ist.

2. a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : (-1,1) \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, bijektiv ist.

b) Gegeben seien die Funktionen $g(x) = \sqrt{2-x^2}$ und $h(x) = \frac{1}{1-x}$.
– Bestimmen Sie den maximalen reellen Definitionsbereich von g und h.
– Bestimmen Sie $g \circ h$ und $h \circ g$ zusammen mit ihren maximalen reellen Definitionsbereichen.

3. Welche der folgenden Funktionen $f : D \to B$ sind injektiv, surjektiv, bijektiv? Wie muss man den Definitionsbereich D gegebenenfalls einschränken, damit f injektiv wird? Wie muss man den Bildbereich eventuell verändern, damit f surjektiv wird? Bestimmen Sie auch die Umkehrfunktionen der durch geeignete Einschränkungen hervorgehenden bijektiven Funktionen.

a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}, \quad B = \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3+2x}{1-x}$,
b) $D = B = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2\,|x|\,.$

4. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ mit $a_n = \frac{n-2}{n+1}$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - 1| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt, für

a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, **b)** $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

5. Untersuchen Sie die angegebenen Folgen (a_n), (b_n), (c_n) und (d_n) auf Konvergenz:

$$a_n = \frac{n^2}{n^3-2}\,, \qquad b_n = \frac{n^3-2}{n^2}\,,$$

$$c_n = n - 1\,, \qquad d_n = b_n - c_n\,.$$

Geben Sie im Fall der Konvergenz auch den Grenzwert der Folge an.

6. a) Stellen Sie eine Vermutung auf, wie eine explizite Darstellung der rekursiv gegebenen Folge (a_n) aussieht:

$$a_{n+1} = 2\,a_n + 3\,a_{n-1}, \quad \text{mit den Startwerten} \quad a_1 = 1,\ a_2 = 3,$$

und weisen Sie ihre Korrektheit mittels vollständiger Induktion nach. [1]
Hinweis: Berechnen Sie einige Folgenglieder.

b) $(*)$ Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_1 = 0, \quad \text{und} \quad a_n = \frac{1}{2-a_{n-1}} \quad \text{für } n \geq 2$$

nach unten durch 0 und nach oben durch 1 beschränkt ist und dass sie streng monoton wachsend ist. Ist die Folge konvergent? Wie lautet ihr Grenzwert? [2]

---

[1] Der Induktionsanfang bezieht sich auf $n = 3$, wobei die gewählten Startwerte a_1, a_2 eingehen. Für derartige Rekursionen kann man übrigens die allgemeine Gestalt der Lösungen und konkrete Lösungen für beliebige Startwerte angeben. Dies ist jedoch nicht Thema dieser Aufgabe.

[2] Im Gegensatz zu Aufgabe 6 ist dies eine *nichtlineare* Rekursion, d.h., a_n hängt in nichtlinearer Weise von a_{n-1} ab. Das genaue Verhalten der a_n hängt hier vom gewählten Startwert a_1 ab. Für andere Startwerte ist z.B. im allgemeinen die Monotonie verletzt.

7. Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Eine Folge konvergiert, falls sie monoton und beschränkt ist.

b) Eine konvergente Folge ist monoton und beschränkt.

c) Wenn eine Folge nicht monoton ist, kann sie nicht konvergieren.

d) Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, kann sie nicht konvergieren.

e) $(*)$ Wenn es eine Lösung zur Fixpunktgleichung einer rekursiv definierten Folge gibt, so konvergiert die Folge gegen diesen Wert.

Hinweis: Für eine durch ein rekursives Gesetz der Form $a_n = f(a_{n-1})$ definierte Folge bezeichnet die man die Gleichung $a = f(a)$ als die zugehörige Fixpunktgleichung.

8. Zeigen Sie, dass für zwei beliebige positive Zahlen $x, y > 0$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x^n + y^n} = \max\{x, y\}\,.$$

Hinweis: Schätzen Sie die Folgenglieder nach unten und oben durch Terme ab, in denen nur die größere der beiden Zahlen vorkommt, und verwenden Sie das Einschließungsprinzip.

9. Zeigen Sie für $p \in \mathbb{N}$ und $|q| < 1$: $\lim\limits_{n \to \infty} n^p\, q^n = 0\,.$

Hinweis: Bilden Sie die n-te Wurzel der Beträge der Folgenglieder.

10. Bestimmen Sie für die angegebenen Folgen (a_n), (b_n) und (c_n) mit $n \in \mathbb{N}$ jeweils

- Supremum, Infimum, sowie
- $(*)$ Limes Superior und Limes Inferior,

falls diese Zahlen existieren.

a) $a_n = 1 + (-1)^n + n^{-\frac{1}{2}}\,,$

b) $b_n = \begin{cases} \frac{k-1}{k}\,, & n = 3\,k \\ \frac{1}{k+1}\,, & n = 3\,k - 1 \\ -\frac{1}{k^2}\,, & n = 3\,k - 2 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}),$

c) $c_n = \dfrac{n^2 + 1}{n + 1}\,.$

Hinweis: 'Limes Superior' bzw. 'Limes Inferior' sind definiert als

$$\limsup_{n \to \infty} \{a_n\} := \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} \{a_k\}\,, \qquad \liminf_{n \to \infty} \{a_n\} := \lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} \{a_k\}\,,$$

sofern diese Grenzwerte existieren. Für beliebige (a_n) ist $(S_n) = \sup\limits_{k \geq n} \{a_k\}$ monoton fallend und $(I_n) = \inf\limits_{k \geq n} \{a_k\}$ monoton wachsend. Daher gilt auch

$$\limsup_{n \to \infty} \{a_n\} = \inf_{n \to \infty} \sup_{k \geq n} \{a_k\}\,, \qquad \liminf_{n \to \infty} \{a_n\} = \sup_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} \{a_k\}\,.$$