Es mag sein, dass du dich nicht für Mathematik interessierst,
aber die Mathematik interessiert sich für dich.

1. Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} x^{-k} \Big) \quad (|x| > 1)$$

2. Fortsetzung von UE 1, Aufgabe 3c): Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 := q, \quad a_n := p\, a_{n-1} + q\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

mit $p \in [0, 1]$ und $q \geq 0$. (Interpretation: Abnahme einer Population a_n um einen Faktor p von Schritt zu Schritt, plus Zuwachs q durch Migration in jedem Schritt.)

a) Geben Sie in ähnlicher Weise wie für UE 1, 3c), eine explizite Formel für die a_n an.

b) Berechnen Sie den 'asymptotischen Zustand' $a_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

– unter Verwendung der Lösungsdarstellung aus a),

– ohne Verwendung von a),

für diejenigen Werte von p, für die dieser Limes existiert.

3. (*) (Bedingte) Konvergenz eines Pfades in der Ebene:

Ein punktförmiges Tierchen (nennen wir es Bello) krabbelt in der (x, y)-Ebene herum, ausgehend vom Nullpunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ entlang horizontaler und vertikaler Geradenstücke: Zunächst

- 1 mm nach rechts,
- dann 1/2 mm nach oben,
- dann 1/3 mm nach links,
- dann 1/4 mm nach unten;

weiters

- 1/5 mm nach rechts,
- dann 1/6 mm nach oben,
- dann 1/7 mm nach links,
- dann 1/8 mm nach unten;

usw. Diesen Prozess denken wir uns bis ins Unendliche fortgesetzt. Mit (x_n, y_n) bezeichnen wir die Position von Bello nach n Schritten.

a) Überlegen Sie, wie weit sich Bello maximal vom Nullpunkt entfernt.

b) Drücken Sie x_n und y_n mittels n-abhängiger Summen $\sum\limits_{k=\cdots}^{\cdots}$ aus.

c) Da sich Bello nicht beliebig weit von seiner Startposition entfernt, sind diese Summen (Reihen) für $n \to \infty$ offensichtlich konvergent. Weisen Sie dies mathematisch rigoros nach. Sind diese Reihen absolut oder bedingt konvergent?

Anmerkung: Den Limes $(x_\infty, y_\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n)$, d.h. den Limes der Position von Bello für $n \to \infty$, werden wir später mit Werkzeugen aus der Differentialrechnung bestimmen.

d) Angenommen, Bello krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit v mm/s. Mit t_n bezeichnen wir die Zeit, die nach n Schritten vergangen ist. Charakterisieren Sie das Konvergenzverhalten der Folge (t_n) für $n \to \infty$.

e) Angenommen, Bello beschleunigt während seiner Reise, d.h. er startet mit Geschwindigkeit v mm/s und verdoppelt seine Geschwindigkeit nach jedem Schritt. Wiederum bezeichnen wir mit t_n die Zeit, die nach n Schritten vergangen ist. Charakterisieren Sie das Konvergenzverhalten der Folge (t_n) für $n \to \infty$. Geben Sie (im Fall der Konvergenz) eine obere Schranke für $t_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} t_n$ an.

4. Fortsetzung von Aufgabe 3:

Geben Sie eine Abschätzung dafür an, wie weit Bello nach n Schritten noch von seinem Ziel (x_∞, y_∞) entfernt ist.

5. Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k\,(k+1)}}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Kriteriums, dass die Reihe konvergiert.

b) Berechnen Sie den Wert der Reihe.

6. Die Werte $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ bezeichnet man als *Harmonische Zahlen.* Bekanntlich gilt $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \infty$ (Harmonische Reihe). Wie steht es um die Konvergenz der Reihen

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H_n}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n\, H_n \quad (|q| < 1)$?

7. *Partielle Summation* (ein diskretes Analogon zur partiellen Integration):

a) Gegeben seien zwei Folgen (a_n) und (b_n). Schreiben Sie den Ausdruck

$$a_{n+1}\, b_{n+1} - a_1\, b_1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

in Form einer Teleskopsumme, und beweisen Sie davon ausgehend die Formel für die partielle Summation,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k)\, b_k \;=\; a_{n+1}\, b_{n+1} - a_1\, b_1 \;-\; \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\, (b_{k+1} - b_k)\,.$$

b) Falls $(a_n\, b_n)$ eine Nullfolge ist, ergibt sich aus a) rein formal für $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)\, b_k \;=\; -\,a_1\, b_1 \;-\; \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}\, (b_{k+1} - b_k)\,.$$

Ist dann die Konvergenz der Reihe links bzw. rechts gesichert, oder benötigt man dafür zusätzliche Voraussetzungen?

c) (∗) Verwenden Sie die Formel für die partielle Summation, um den Wert der verallgemeinerten geometrischen Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, q^k$$

zu berechnen. Für welche $q \in \mathbb{R}$ ist die Reihe konvergent?

8. (*) Gegeben seien die Folgen $(a_k) = (p^k)$ und $(b_k) = (q^k)$, wobei $|p| < 1$ und $|q| < 1$. Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sind konvergente geometrische Reihen.

a) Bestimmen den Wert der zugehörigen Cauchy'schen Produktreihe auf 2 Arten.

b) Welcher Sonderfall tritt hier auf? Diskutieren Sie diesen separat. (Hinweis: Aufgabe 7c).)

9. $(*)$ Die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x) = e^x$ ist durch die unendliche Reihe

$$e^x \;:=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

definiert; diese ist für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

a) Für $x \neq 0$ ergibt sich durch formale Manipulation der Exponentialreihe:

$$g(x) \;:=\; \frac{e^x - 1}{x} \;=\; 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \ldots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

Zeigen Sie mathematisch rigoros, dass diese Reihendarstellung für $g(x)$ korrekt ist.

b) Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck '$g(0) = 0/0$'. Setzt man andererseits in der Reihendarstellung für $g(x)$ den Wert $x = 0$ ein, so ergibt sich der Wert 1. Es ist naheliegend, daraus zu schließen, dass $g(x)$ an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit besitzt, mit $g(0) = \lim_{x \to 0} g(x) = 1$. Diese Argumentation muss jedoch genau begründet werden.

Beweisen Sie $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$, indem Sie

$$\lim_{x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \;=\; 1 \quad \text{bzw. dazu äquivalent:} \quad \lim_{x \to 0} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \;-1 \Big) \;=\; 0$$

nachweisen. Schreiben Sie zu diesem Zweck den rechten Ausdruck $\Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \ldots -1 \Big)$ wiederum als Reihe an, geben Sie dafür eine konvergente Majorante an, und zeigen Sie, dass deren Wert für $x \to 0$ tatsächlich gegen 0 konvergiert.

10. Gegeben sei die Funktion $f\colon\, (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{1 + x^p} \;-1}{x}\,, \quad p > 0\,.$$

Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck '$f(0) = 0/0'$.

a) Untersuchen Sie, für welche $p > 0$ an der Stelle $x = 0$ eine hebbare rechtsseitige Unstetigkeit vorliegt, d.h. wann der Limes

$$\lim_{x \to 0+} f(x)$$

existiert, und berechnen Sie diesen Limes in Abhängigkeit von p. (Hinweis: Umformen.)

b) Für $p \geq 1$ kann man auch so vorgehen: Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sqrt{1 + c} \;<\; 1 + \frac{c}{2} \quad \text{für} \quad c > 0\,,$$

und versuchen Sie so die Existenz von $\lim_{x \to 0+} f(x)$ für $p \geq 1$ nachzuweisen. Kann darauf basierend den Limes ebenfalls berechnen?