1. Formulieren Sie basierend auf der ε-δ - Definition der Stetigkeit

a) die Aussage, dass eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ nicht stetig ist,

b) die Aussage, dass f auf D nicht gleichmäßig stetig ist;

c) weiters die Aussage, dass f auf D nicht Lipschitz-stetig ist.

2. Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sind richtig, und welche sind falsch?

a) f ist stetig, falls für jedes $\hat{x} \in (a, b)$ der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to \hat{x}-} f(x)$ mit dem rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \to \hat{x}+} f(x)$ übereinstimmt.

b) f ist stetig, falls für jedes $\hat{x} \in (a, b)$ der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \hat{x}} f(x)$ existiert.

c) Falls f stetig ist, ist f auch beschränkt.

d) Falls f stetig ist und eine Nullstelle besitzt, aber nicht die Nullfunktion ist, dann gibt es Stellen $x_1,\ x_2 \in (a, b)$ mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$.

e) Falls f stetig und monoton ist, wird jeder Wert aus dem Bild von f an genau einer Stelle angenommen.

Hinweis: Wenn Sie vermuten, dass eine Aussage falsch ist, versuchen Sie ein explizites Gegenbeispiel zu konstruieren.

3. a) An welchen Stellen ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \left(\frac{\operatorname{sign}(x)}{x-5}\right)^2$$

stetig bzw. unstetig?

b) Zeigen Sie: Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig.

c) Zeigen Sie: Jedes Polynom ist auf jedem beschränkten Intervall $[a, b]$ Lipschitz-stetig.

4. Zeigen Sie: Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig, siehe Skriptum. Vollziehen Sie den Beweis nach und argumentieren Sie, dass gilt: Es gibt eine Konstante $H > 0$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \;\leq\; H\,|x_1 - x_2|^\kappa \quad \text{für alle} \;\; x_1, x_2 \in [0, 1],$$

mit $H > 0$ und $\kappa \in (0, 1]$. Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Hölder-Stetigkeit.* Wie lauten die Konstanten H und κ?

Anmerkung: Hölder-Stetigkeit mit $\kappa = 1$ bedeutet Lipschitz-Stetigkeit (mit $L = H$). Jede Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig (warum?).

5. Wie ist jeweils der Parameter $c \in \mathbb{R}$ zu wählen, damit die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ stetig sind?

a) $D = [-1, 1], \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2\,x - 3}{x^2 + x - 2}\,, & x \neq 1 \\ c\,, & x = 1 \end{cases}$

b) $D = (0, 1], \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6}{x^3 - x}\,, & x \neq 1 \\ c\,, & x = 1 \end{cases}$

6. Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ besitzt in $[a,b]$ mindestens einen *Fixpunkt* $x^* \in [a,b]$, d.h. $x^* \in [a,b]$ mit der Eigenschaft $x^* = f(x^*)$.

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g(x) = x - f(x)$ an.

b) f sei sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$ (eine sogenannte *Kontraktion*). Zeigen Sie: Der Fixpunkt x^* ist eindeutig. Geben Sie auch ein konkretes Beispiel an.

7. (*) Gegeben sei eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der folgenden Zwischenwerteigenschaft: Sind y_1, $y_2 \in f([a,b])$, so ist $y \in f([a,b])$ für jedes y zwischen y_1 und y_2. Ist f notwendigerweise stetig?

Hinweis: Überlegen Sie, ob eine Funktion mit einer typischen Unstetigkeit die Eigenschaft erfüllen kann.

8. (**) Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $x \in (a,b)$ existiert ein $\xi \in (x,b]$ mit $f(\xi) > f(x)$.

(ii) Für $x = a$ gilt Eigenschaft (i) *nicht*.

Zeigen Sie: Es gilt $f(x) \le f(b)$ für alle $x \in (a,b)$, sowie $f(a) = f(b)$.

Hinweis: Beweisen Sie die beiden behaupteten Eigenschaften nacheinander in indirekter Weise. Fertigen Sie eine Skizze an, um zu verstehen, wieso die Aussagen richtig sind, bzw. wie sich eine Funktion, die (i) und (ii) erfüllt, typischerweise verhält.

9. Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + a\,x + 6}{(x-2)^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 4\,x + a}{x^2 - 1}$

10. Ein Anwendungsproblem:

Martin wandert in vier Stunden am Vormittag von Adorf nach Bstadt (stellen Sie sich eine geradlinig verlaufende Straße vor, aber das ist im Prinzip egal). In Bstadt macht er Mittagspause. Am Nachmittag wandert er in vier Stunden wieder nach Adorf zurück.

a) Zeigen Sie: Es gibt mindestens eine Stelle x^* zwischen Adorf und Bstadt, die er auf beiden Wanderungen nach der gleichen Zeitspanne t^* erreicht.

b) Angenommen, Martin geht immer nur vorwärts in Richtung seines Zieles, d.h. er kehrt nie um und bleibt nie stehen. Zeigen Sie: t^* und x^* sind eindeutig.

c) Angenommen, Martin legt auf dem Hinweg oder/und auf dem Rückweg zwischendurch eine Pause ein ☕ (3 Möglichkeiten). In welchen Fällen bleibt die Aussage aus b) bezüglich der Eindeutigkeit von t^* bzw. von x^* sicher richtig und wann nicht?

Anmerkung: Martin wird als punktförmiges Subjekt betrachtet (sozusagen als Massepunkt), das sich aus energetischen Gründen nur stetig bewegen kann. Adorf und Bstadt stellen wir uns als „Punkte auf der Landkarte“ vor. Skizzen sind hilfreich für die Lösung.