Die fortschreitende Mathematik hat den Vorteil, dass man sich genauer irren kann.

Anmerkung: Die Aufgaben $3, 5$ und 10c) löst man sinnvollerweise mit Rechnerunterstützung. Manche der Aufgaben (z.B. $4, 6, 7$ und 10b)) wären mittels Methoden aus späteren Kapiteln (Differentialrechnung) direkter einer Lösung zugänglich; sie sollen hier jedoch hier ohne Zuhilfenahme derartiger Methoden gelöst werden.

1. Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$:

a) $x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18$

b) $x^3 + x^2 - q^2\,x - q^2,\ q \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von q treten mehrfache Nullstellen (doppelt, dreifach) auf?

Hinweis: Erraten sie jeweils eine der Nullstellen.

2. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

a) $\dfrac{3\,x^2 - 9\,x + 6}{x^3 - 2\,x^2 - 9\,x + 18}$ **b)** $\dfrac{x}{x^3 + x^2 - q^2\,x - q^2}$, $q \in \mathbb{R}$

Zu b): Berücksichtigen Sie Sonderfälle (spezielle Werte von q).

3. Man bestimme das jeweilige eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0\ldots 3\}$ (mit $c \in \mathbb{R}$):

a) $\{\,(-2,+c),\ (-1,+c),\ (+1,+c),\ (+2,+c)\,\}$

b) $\{\,(-2,+c),\ (-1,-c),\ (+1,-c),\ (+2,+c)\,\}$

c) $\{\,(-2,+c),\ (-1,-c),\ (+1,+c),\ (+2,-c)\,\}$

d) $\{\,(-2,+c),\ (-1,-c),\ (+1,-c),\ (+2,-c)\,\}$

$+$ Auswertung an $x = 0$.

4. Gegeben sei die stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

a) Zeigen Sie: $f(x)$ ist auf $(0,1)$ und auf $(1,\infty)$ streng monoton. Wo ist f fallend, wo wachsend?

b) Wie lautet der Wert von $\min\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f(x)$?

c) Wie in a), b), aber für $g(x) = \exp(f(x))$.

d) Wie in a), b), aber für $g(x) = \big(f(x)\big)^{-2}$.

5. Überlegen Sie sich basierend auf der Definition der Euler'schen Zahl e eine Funktion $f(t)$, für die gilt

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = e\,,$$

wobei jedoch $f(0)$ nicht direkt auswertbar ist (hebbare Unstetigkeit). Approximieren Sie nun e numerisch, indem Sie $f(t)$ an den Stellen $t = 0.1,\ 0.2,\ 0.3$ durch ein Polynom vom Grad 2 interpolieren und an der Stelle $t = 0$ auswerten.

Anmerkung: Eine derartige Vorgangsweise wird als *Extrapolation* bezeichnet und leistet in vielen anderen Zusammenhängen nützliche Dienste. Die hier berechnete Approximation von e ist jedoch nicht besonders genau. Wie könnte man sie verbessern? (Man kann auch Fehlerabschätzungen angeben, dies ist jedoch nicht Teil dieser Aufgabe.)

6. a) (*) Der Beginn der Exponentialreihe, mit festem $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \exp(x) \approx E_n(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

liefert eine Approximation für e^x, die für 'kleines' x sinnvoll ist (immer genauer für immer kleineres $|x|$). [1] Für $x < 0$ handelt es sich um eine alternierende Reihe. Geben Sie für den Fall $x < 0$ eine rigorose Abschätzung für den Fehler $|E_n(x) - e^x|$ in Abhängigkeit von x an.

Anmerkung: Eine sehr ähnliche Fehlerabschätzung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ (in VO: später).

b) Eine zeitabhängige Größe $X = X(t)$ gehorche dem Gesetz $X(t) = C\,e^{\lambda t}$, $t \geq 0$, mit $C > 0$ und der Abklingrate $\lambda < 0$. (Falls wir z.B. die Zeit in Stunden [h] messen, dann hat λ die Dimension 'pro Stunde', also $[\mathrm{h}^{-1}]$.)

Der Anfangswert C und die Abklingrate λ seien unbekannt, aber bekannt sind Messwerte $0 < X_1 = X(t_1)$ und $0 < X_2 = X(t_2) < X_1$ zu zwei Zeitpunkten $t_2 > t_1 > 0$. Geben Sie Formelausdrücke an (in Abhängigkeit von t_1, t_2, X_1, X_2) für die Werte von C, λ und für die betreffende Halbwertzeit $T_{1/2}$. Stellen Sie C in der Form $C = X_1^{\gamma_1} + X_2^{\gamma_2}$ dar, mit geeigneten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

7. a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Exponentialfunktion den Limes

$$\lim_{x \to 0} \left(\ln(1+x) - x\right)$$

b) Wir werten die Funktion $f(x) = \ln(1+x)$ am Rechner aus, für $x = 10^{-1}$, 10^{-2}, 10^{-3}, usw. Hier eine Tabelle der auf 10 Dezimalstellen exakt gerundeten Werte:

```
  x       f(x) = ln(1+x)
-----------------------------
 1e-01   0.95310179804e-01
 1e-02   0.99503308532e-02
 1e-03   0.99950033308e-03
 1e-04   0.99995000333e-04
 1e-05   0.99999500003e-05
 1e-06   0.99999950000e-05
 1e-07   0.99999995000e-07
 1e-08   0.99999999500e-08
 1e-09   0.99999999950e-09
 1e-10   0.99999999995e-10
```

Versuchen Sie aufgrund der Tabelle zu erkennen, welches quadratische Polynom $q(x)$ für kleine x offenbar eine sehr gute Approximation von $f(x)$ darstellt.

c) Die Relation $\ln(1+x) \approx q(x)$ ($q(x)$ aus b)) kann man auch schreiben als $\exp(q(x)) \approx 1 + x$. Entwicklen Sie $\exp(q(x))$ in eine Reihe, d.h., bestimmen Sie die ersten Terme dieser Entwicklung und vergleichen diese mit $1 + x$. Was sieht man?

Anmerkung: Diese Überlegung ermöglicht es Ihnen auch, die Koeffizienten von $q(x)$ zu ermitteln, falls Sie diese anhand der Tabelle nicht identifizieren konnten.

---

[1] Für Werte x weiter weg von 0 ist das eine sehr ineffiziente Approximationsmethode für e^x. Man müsste n sehr groß wählen, was auch zu einem *computational disaster* führt (Rundungsfehler am Computer machen die Approximation kaputt). Es gibt wesentlich bessere Verfahren.

8. a) Zeigen Sie: $|\cos(x+\varepsilon) - \cos x| \;\leq\; \sqrt{2}\,(1-\cos\varepsilon)$

Anmerkung/Hinweis: Dadurch kann man z.B. den Effekt einer kleinen Störung ε des Winkels x auf den Wert des Cosinus abschätzen.

Zum Beweis greife man auf die berühmte *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung* zurück (die in 'Lineare Algebra' bewiesen wird), und zwar in der vereinfachten Variante

$$|\,a_1\,b_1 + a_2\,b_2\,| \;\leq\; \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Anmerkung: Die Abschätzung ist nicht 100 % 'scharf', sie gilt jedoch für beliebige x und ε.

b) Beweisen Sie die trigonometrischen Identitäten:

$$\text{(i)}\quad \sin 2x \;=\; \frac{2\,\tan x}{1+\tan^2 x}\,, \qquad \text{(ii)}\quad \cos 2x \;=\; \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\,.$$

c) Zeigen Sie:

$$\arcsin\xi + \arcsin\eta \;=\; \arcsin\left(\xi\sqrt{1-\eta^2} + \eta\,\sqrt{1-\xi^2}\right) \quad \text{für} \quad \xi^2+\eta^2 \leq 1\,.$$

9. a) Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen sinh und cosh nach:

$$\begin{aligned}\sinh(x\pm y) &= \sinh x\,\cosh y \pm \cosh x\,\sinh y\\ \cosh(x\pm y) &= \cosh x\,\cosh y \pm \sinh x\,\sinh y\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie: $\sinh x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

10. (*) Um die Entfernung eines Meteoriten M von der Erde zu messen, wird dieser von zwei verschiedenen Stellen A und B aus angepeilt. Sei $l = \overline{AB}$ der (bekannte) Abstand zwischen A und B. Die drei Punkte A, B und M liegen auf einem Dreieck in einer gemeinsamen Ebene, und gemessen werden die Winkel α, β zwischen den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AM}$ bzw. zwischen $\overline{AB}$ und $\overline{BM}$.

a) Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass wir a priori wissen, dass das Dreieck ABM gleichschenkelig ist, d.h., wir benötigen nur eine Messung für $\alpha = \beta$.

Wie weit ist M von A entfernt?

b) Eine derartige Messung ist unvermeidlicherweise fehlerbehaftet, d.h., der gemessene Wert ist $\tilde{\alpha} = \alpha\,(1+\varepsilon)$ mit einem kleinen relativen Messfehler $\varepsilon = \frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\alpha}$.

Geben Sie eine Schätzung dafür an, wie stark sich dieser Messfehler auf den daraus errechneten Abstand $L = \overline{AM}$ auswirkt (in Abhängigkeit von l, α und ε.) Schreiben Sie dies in der Form $\tilde{L} = L\,(1+\delta)$ mit dem relativen Fehlereffekt δ.

Hinweis: Verwenden Sie die Näherungen $\cos x \approx 1$ und $\sin x \approx x$ für kleine Winkel x und vernachlässigen Sie Terme der Größenordnung ε^2.

c) Rechnen Sie a), b) numerisch durch für $l = \overline{AB} = 100\,\text{km}$, $\varepsilon = 10^{-2}$ (1 %), 10^{-3} (0.1 %), und unter der Annahme $\alpha = 89°$.