1. Zeigen Sie

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(e^x \sin x\big) \;=\; (\sqrt{2})^n\, e^x \sin\big(x + \frac{n\,\pi}{4}\big) \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem für den Sinus, um einen Ausdruck der Gestalt $\sin y + \cos y$ in der Form $C \sin(y + \varphi)$ darzustellen. $(C, \varphi \;=\; ?)$

2. **a)** Leiten Sie die Formel die Ableitung des Sinus her, $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, und zwar mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion, indem Sie von der Formel für die Ableitung von arcsin ausgehen.

b) Berechnen Sie jeweils die Gleichung der Tangente an die Kurve $(x, f(x))$ (Graph der Funktion f) an der Stelle $(x_0, f(x_0))$:

(i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,, \quad x_0 = -\frac{1}{2}\,;$ (ii) $f(x) = x\, \ln x\,, \quad x_0 = e$

c) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$ jene Intervalle, auf denen sie monoton ist, und geben sie ein möglichst großes Intervall an, auf dem f Lipschitz-stetig ist. Wie lautet die zugehörige optimale (kleinstmögliche) Lipschitzkonstante?

3. Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ folgender Funktionen:

a) $f(x) = \Big(x + \dfrac{1}{x}\Big)^2, \quad x \neq 0$

b) $f(x) = \cos(x^2) \cos^2 x\,, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $\ln\Big(\dfrac{e^x - 1}{e^x}\Big), \quad x \neq 0$

d) $\dfrac{1}{\big(g(x^k)\big)^n}\,, \quad k, n \in \mathbb{N}$

(In d) ist g irgendeine gegebene differenzierbare Funktion.)

4. Zeigen Sie, dass die beiden Ungleichungen

$$\frac{\pi}{4} \;\le\; \arctan(x) + \frac{1 - x}{1 + x^2} \;\le\; \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \ge 0$ gelten.

Hinweis: Analysieren Sie den Verlauf des Funktionsausdruckes in der Mitte für $x \in \mathbb{R}_0^+$.

5. Berechnen Sie die Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \cot x \, \arcsin x$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \Big(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\Big)$

d) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}\,, \quad a \in \mathbb{R}^+,\; a \neq 1$

6. Bestimmen Sie die Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\,, & x \neq 0 \\ c\,, & x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

7. Der Widerstand R eines Schwingkreises mit der Kapazität $C = 20$ und Induktivität $L = 5$ ist zu bestimmen. Dazu wird die Kreisfrequenz ω gemessen. Der gemessene Wert sei $\omega = 7$, mit einer Genauigkeit von $\pm 1\%$.

Was ist der Wert von $R = \dfrac{1}{\omega\, C - 1/(\omega L)}$, und welchen relativen Fehler (in %) erwarten Sie bei der Auswertung von R aufgrund der Unsicherheit in der Messung von ω?

8. Bestimmen Sie k derart, dass

a) $\sqrt{2\,x^2 - 1} \;=\; k\,x + O(1), \quad x \to \infty$

b) $\big(1 + x^2\big)^{-1/2} \;=\; 1 + k\,x^2 + O(x^4), \quad x \to 0$

Hinweis: Substituiere Sie die Variable x in geeigneter Weise, so dass Sie eine Funktion erhalten, die Sie an 0 linearisieren können.

9. Ermitteln Sie für die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3\,x^2 - 4}{x^2 + 2\,x - 3}$$

den maximalen Definitionsbereich und bestimmen Sie die Art der Unstetigkeitsstellen. Finden Sie die Nullstellen und untersuchen Sie den Charakter der Extrema. Untersuchen Sie weiters das Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. Stellen Sie die Geradengleichung der Asymptoten auf und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

10. (*) Herr DDDr. Bellmann steht an der Stelle $(0,0)$ in der xy-Ebene, sein Hund Bello wartet links neben ihm irgendwo auf der x-Achse. DDDr. Bellmann geht mit konstanter Geschwindigkeit v_B in y-Richtung los und spaziert die positive y-Achse entlang. Bello läuft mit konstanter Geschwindigkeit v_b hinterher, und zwar so, dass der Hundegeschwindigkeitsvektor zu jedem Zeitpunkt genau dorthin zeigt, wo sich DDDr. Bellmann gerade befindet. (Bello ist ein sehr treuer Hund.)

Zeigen Sie, dass Bellos Bahnkurve $y = b(x)$ in der xy-Ebene der folgenden nichtlinearen Differentialgleichung genügt: [1]

$$\frac{v_b}{v_B}\, x\, b''(x) + \sqrt{1 + (b'(x))^2} \;=\; 0\,.$$

Hinweis: Machen Sie eine Skizze. Überlegen Sie zunächst aufgrund der Angabe ('treuer Hund') einen Zusammenhang zwischen der Hundeabszisse x, der Hundeordinate $b(x)$ und der zugehörigen Position B von DDDr. Bellmann auf der y-Achse. Schreiben dies in der Form $B - b(x) = \ldots$; diese Identität gilt für alle $x = x(t)$ und die zugehörigen $B = B(t)$. Leiten Sie dann eine Identität zwischen $x(t)$ und $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\,x(t)$ her, die aus der Angabe über die Hundedynamik folgt. (Wie der Hundegeschwindigkeitsvektor darszustellen ist, wissen Sie aus 'PM I'.) Überlegen Sie weiter.

[1] Die sogenannte Bellmann-Gleichung (© Grobian Gans, 1888).