Mathematics is not a deductive science; that's a cliché.
When you try to prove a theorem you don't just list
the hypotheses, and then start to reason.
What you do is trial and error, experimentation, guesswork.

Paul R. Halmos

Die Aufgaben 7 und 9 benötigen Rechnerunterstützung, genau genommen auch Aufgabe 4. Letztere ist gedacht als Unterhaltung zwischendurch für die **hoffentlich erholsamen Weihnachtsferien** (das wünschen wir Ihnen!). Viel lustiger als Kreuzworträtsel lösen und auch trickreicher. Beachten Sie die Hinweise. (Die Vorbereitung auf den 2. Test, Stoff UE 3–6, ist natürlich vorrangig.)

1. a) Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{p\,x}}{1-e^{q\,x}} \quad (p,q\in\mathbb{N})$$

auf zwei Arten: einmal mit Hilfe geometrischer Summen und einmal mit Hilfe der Differentialrechnung.

b) Bestimmen Sie den gleichen Limes für beliebiges $p,q\in\mathbb{R}$ $(q\neq 0)$.

2. Die *Bernstein-Polynome* $B_{k,n}(x)$ vom Grad $n\in\mathbb{N}$ sind definiert als

$$B_{k,n}(x) := \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}\,, \quad k=0\ldots n\,.$$

a) Zeigen Sie, ohne die Ableitung $B'_{n,k}(x)$ zu berechnen: Für $0<k<n$ gibt es eine Stelle $\xi\in(0,1)$ mit $B'_{n,k}(\xi)=0$.

b) Zeigen Sie, indem Sie Ableitung $B'_{n,k}(x)$ berechnen: Für $0<k<n$ gibt es *genau eine* Stelle $\xi\in(0,1)$ mit $B'_{n,k}(\xi)=0$. Wo befindet sich diese Stelle? Welcher Typ von Punkt liegt hier vor?

c) Wie ist das Verhalten für $k=0$ und $k=n$?

Anmerkung: Der Normierungsfaktor $\binom{n}{k}$ ist für diese Aufgabe unwesentlich. (Er ist so gewählt, dass gilt $\sum\limits_{k=0}^{n} B_{n,k}(t)\equiv 1$, eine sogenannte *Zerlegung der Eins.*)

3. (*) Beweisen Sie die Ungleichung

$$a\,b \;\le\; \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

für alle $a,b\ge 0$, wobei $p>1$ und q der zu p 'konjugierte' Exponent, d.h. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\,.$

Hinweis: Halten Sie $b\ge 0$ beliebig fest und analysieren Sie die Funktion $f(a):=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}-a\,b\,.$ Sehen Sie sich die Nullstelle von f' an.

4. (**) [vgl UE 3:] Führen Sie für die Funktion $f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}\,,$

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{1+x^p}\;-1}{x}\,, \quad p>0\,,$$

eine Kurvendiskussion in Abhängigkeit des Parameters p durch.

Berechnen Sie auch zunächst nochmals $\lim_{x \to 0+} f(x)$ mittels einer anderen Methode als in UE 3. Untersuchen Sie auch die Asymptotik für $x \to \infty$.

Hinweis: Für den Spezialfall $p = 1$ ist $f(x)$ ist an $x = 0$ rechtsseitig stetig fortsetzbar. Um $\lim_{x \to 0+} f'(x)$ zu bestimmen, schreibt man $f'(x)$ als Quotient und wendet zweimal die Regel von de l'Hospital an.

Auch die Bestimmung der Nullstelle von f' ist nicht ganz einfach. Hinweis: Substituiere $\sqrt{1+x^p} = u$. Für welche p existiert eine positive Lösung x?

Auf die Bestimmung allfälliger Wendepunkte verzichten wir – das wäre noch aufwendiger.

Anmerkung: Diese Aufgabe ist per Hand eher mühevoll zu lösen. Mit Unterstützung durch ein Formelmanipulationssystem am Computer geht es sehr gut, weil die Software das Differenzieren und Gleichungslösen übernimmt. Es geht dann darum, die so erhaltenen Ergebnisse richtig zu deuten und, wenn möglich, nachzuvollziehen. Auch die Grafikunterstützung ist sehr nützlich.

5. [Prüfungsbeispiel vom 12.10.2012:] Gegeben Sei die Funktion $f(x) = e^x/e^{(x^2)}$.

a) Führen Sie für f eine komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

b) Zeigen Sie: $g(x) := f(x + \frac{1}{2})$ ist eine gerade Funktion.

6. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es $x > 0$ mit

$$\frac{(1+x)^n}{x} < n\,e\,.$$

Geben Sie einen derartigen (von n abhängigen) Wert für x an.

7. *Eine 'inverse Kurvendiskussion' ist eine Aufgabe, bei der man eine Funktion aufgrund vorgegebener Eigenschaften zu konstruieren versucht. Die folgende Aufgabe, ein verallgemeinertes Interpolationsproblem, ist von diesem Typ. Die Aufgabe ist eindeutig lösbar (was allerdings a priori nicht leicht zu erkennen ist).*

Wir basteln eine Sprungschanze, indem wir das Profil des Anlaufs (von der Seite gesehen) als Polynom $p(x)$ vom Grad 5 modellieren. Start oben bei $(x_0, y_0) = (0, 30)$ (der Sprungturm ist 30 m hoch), Absprung bei $(x_1, y_1) = (60, 0)$ (Anlauf ist 60 m lang, waagrecht gemessen). Weiters soll gelten $p'(x_0) = -\frac{1}{2}$, $p'(x_1) = -1/10$ und $p''(x_1) = 0$. Weiters fordern wir $p(120) = -30$, so dass das Polynom $p(x)$ für $x > 60$ auch eine denkbare Flugbahn mit beschreibt.

Stellen Sie das Polynom $p(x)$ auf, das diesem Höhenprofil entspricht (ohne geeignete Softwareunterstützung ist dies jedoch sehr mühevoll, da ein Gleichungssystem in 6 Unbekannten zu lösen ist), und zeichnen Sie seinen Verlauf. Weist das Schanzenprofil einen Wendepunkt auf, und wo befindet er sich?

Hinweis: Einen Wendepunkt von $p(x)$ kennen Sie bereits.

Falls Sie das Problem nicht konkret durchrechnen, überlegen Sie wenigstens, was zu tun wäre.

8. Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$, und $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, d.h., f ist konvex.

a) Zeigen Sie: f hat genau eine Minimalstelle $x^* \in [a,b]$.

b) Schreiben Sie eine Newton-artige Iteration für die numerische Berechnung von x^* an, ausgehend von $x_0 \in (a,b)$. Ist diese sicher wohldefiniert?

c) Ein modifiziertes Verfahren zur Minimumsuche: Sei x_i eine Iterierte. Approximiere $f(x)$ lokal durch sein quadratisches Taylor-Polynom an der Stelle x_i und suche dessen eindeutige (?) Minimalstelle. Dies definiert die neue Iterierte x_{i+1}. Schreiben Sie diese Iteration an. Was erkennen Sie?

9. a) Spezifizieren Sie, wie man mit Hilfe des Newton-Verfahrens die folgenden Werte iterativ approximieren kann:

$$\text{(i)}\ \sqrt[3]{x}\,, \qquad \text{(ii)}\ \frac{1}{x} \qquad \text{für gegebenes } x > 0.$$

Fall (ii) ist eigentlich trivial (warum?). Falls wir jedoch annehmen, dass bei der Newton-Iteration keine Division beteiligt sein darf (sonst wäre das ja eigentlich sinnlos), man also nur mit Additionen/Subtraktionen und Multiplikationen auskommen will (z.B. weil Ihr Hund Bello die Divisionstaste Ihres Rechners gefressen hat), dann muss man es ein bisschen anders machen. Wie funktioniert das?

b) Berechnen Sie (i) $\sqrt[3]{2}$ und, unter Verwendung des so erhaltenen Wertes, (ii) $1/\sqrt[3]{2}$, wobei Sie Taschenrechnergenauigkeit anstreben. Beobachten Sie den Verlauf der Iteration und brechen Sie ab, wenn sich innerhalb dieser Genauigkeit nichts mehr ändert. Wählen Sie als Startwerte für die Newton-Iteration 1.5 (Fall (i)) bzw. 0.5 (Fall (ii)).

10. Betrachten Sie die Riemann-Summe

$$R_h(f) := h \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,, \quad \text{wobei} \quad h = \frac{1}{N}\,, \quad x_i = i\,h\,,$$

für eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Laut Definition des Riemann-Integrals gilt $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} R_h(f)$. Falls das Integral formelmäßig nicht berechenbar ist, kann man $R_h(f)$ für $h > 0$ als numerische Approximation verwenden ('Rechteckregel').

Unter a) – c) betrachten wir zur Übung nur die einfache Funktion $f(x) = x^3$.

a) Berechnen Sie $I(f)$, indem Sie den Grenzwert $\lim_{h \to 0} R_h(f)$ bestimmen.

Hinweis/Anmerkung: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} N^2 (N+1)^2$, wie man mittels vollständiger Induktion nachweist. Sie können dies auch als Teleskopsumme auffassen, indem Sie i^3 in der Form $\frac{1}{4}\big(i^2 (i+1)^2 - (i-1)^2 i^2\big)$ schreiben. Die Teleskopsumme ist das diskrete Analogon zu der Formel $I(f) = \int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}\Big(\frac{x^4}{4}\Big)\,dx = \frac{1}{4}$.

b) Geben Sie für den Fehler $|R_h(f) - I(f)|$ eine Abschätzung in Abhängigkeit von h an. Wie schnell geht der Fehler gegen 0 für $h \to 0$?

c) Wie b), jedoch für die 'Trapezregel' [Skizze]

$$T_h(f) := h \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\,, \quad \text{mit} \quad h = \frac{1}{N}\,, \quad x_i = i\,h\,.$$