1. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels partieller Integration:

a) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Substitution:

a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ **b)** (*) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

3. Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int \frac{9\,x}{(x-1)^2\,(x+2)}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{2\,x}{x^4+6\,x^2+25}\,dx$

Anmerkung: Lösen Sie **b)** ohne Zuhilfenahme der Partialbruchzerlegung.

4. Betrachten Sie das 'Fourier-Integral'

$$I_n := \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dabei sei $f(x)$ eine mindestens k-mal stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion.

Zeigen Sie folgende Abklingeigenschaft (Verhalten von I_n für $n \to \infty$):

$$|I_n| = \mathcal{O}(n^{-k}) \;\text{ für }\; n \to \infty\,, \quad \text{d.h.} \quad |I_n| \le \frac{C_k}{n^k}$$

mit einer – von f und k abhängigen, jedoch von n unabhängigen – Konstante C_k. Geben Sie eine derartige Konstante C_k an.

Hinweis: partielle Integration.

5. (*) Geben Sie die allgemeine Darstellung, an in Abhängigkeit von $m, n \in \mathbb{N}_0$, für

$$\int_0^1 x^m\,(1-x)^n\,dx$$

6. Untersuchen Sie die beiden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\,\ln x}$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$

7. Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^x-1}$$

nicht existiert. Berechnen Sie den *Cauchyschen Hauptwert*

$$\mathrm{HW}\int_{-1}^1 \frac{dx}{e^x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{e^x-1} + \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{e^x-1}\Big)$$

8. Betrachten Sie nochmals die beiden Reihen, die sich in Beispiel 3c) vom 3. Übungsblatt aus der Bewegung von Bello in der x-y-Ebene ergeben haben: Für den Limes (x_∞, y_∞) von Bellos Position gilt

a) $x_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ **b)** $y_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$

Berechnen Sie (x_∞, y_∞).

Hinweis: Verwenden Sie die Taylorreihen bezüglich der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ für die Funktionen $\arctan x$ und $\ln(1+x)$, und werten Sie diese an geeigneten Stellen x aus.

9. Das *Integralkriterium* stellt einen Zusammenhang zwischen unendlichen Reihen und uneigentlichen Integralen dar. (Es kann sowohl zum Konvergenznachweis für Reihen als auch für uneigentliche Integrale verwendet werden.)

Sei $m \in \mathbb{N}_0$, und f eine auf $[m, \infty)$ definierte, positive und monoton fallende Funktion. Dann haben

$$\int_m^\infty f(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

das gleiche Konvergenzverhalten, d.h., das uneigentliche Integral links konvergiert genau dann wenn die Reihe rechts konvergiert.

(i) Untersuchen Sie mit Hilfe dieses Kriteriums die Konvergenz der Reihen

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$ **b)** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$

in Abhängigkeit von dem Parameter α.

Hinweis: Führen Sie den Fall **b)** auf **a)** zurück, indem Sie das entsprechende Integral geeignet substituieren.

(ii) Der Beweis des Integralkriteriums beruht darauf, dass die Reihe einer Riemann-Summe für das Integral entspricht. Im Konvergenzfall gilt auch

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \le \int_m^\infty f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

Geben Sie mit Hilfe dieser beiden Ungleichungen ein Intervall (a, b) an mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \in [a, b]$$

Anmerkung (ohne Beweis:) Der exakte Wert dieser Reihe ist $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$.

10. Bestimmen Sie Potenzreihenentwicklung (Taylorreihe) der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

bezüglich der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$, und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius. Konvergiert die Reihe innerhalb des Konvergenzintervalls gegen die Funktion $f(x)$?

Hinweis: Führen Sie die gesuchte Entwicklung auf eine bereits bekannte Reihe zurück.