Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2013/14

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Nachtest (FR, 21.03.2014) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Die Funktionenfolge $\{I_n(x)\}$ sei definiert durch $\boxed{I_n(x) := \underbrace{\int \cdots \int}_{n\ \text{mal}} dx}$,

wobei bei jeder einzelnen Integration die Integrationskonstante als $C = 1$ gewählt wird, d.h., $I_1(x) = \int dx + 1 = x + 1$, $I_2(x) = \int I_1(x)\, dx + 1$, usw. **Berechnen Sie** $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x)$**.** *[a): 2 P.]*

Hinweis: Stellen Sie zunächst $I_n(x)$ explizit dar, indem Sie das entsprechende 'Muster' identifizieren. Falls Sie diese Darstellung auch *streng formal unter Verwendung der* $\sum$ *- Schreibweise* beweisen, erhalten Sie <u>*2 Extra-P*</u>.

$$
\begin{aligned}
I_1(x) &= x + 1\\
I_2(x) &= \frac{x^2}{2} + x + 1\\
I_3(x) &= \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2} + 1\\
&\ \vdots\ \ \text{(Induktion)}\\
I_n(x) &= \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + x + 1 \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}
\end{aligned}
$$

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$:

$$I_{n+1}(x) = \int I_n(x)\, dx + 1 \overset{IND}{=} \int \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \Big) + 1 = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \quad \checkmark$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} I_n(x) = e^x \,.$$

b) Sei $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Berechnen Sie den Limes der Folge $\{a_n\}$, mit $\boxed{a_n = \frac{\ln(n\,k)}{\ln(n^k)}}$ *[b): 2 P.]*

$$a_n \;=\; \frac{\ln(n\,k)}{\ln(n^k)} \;=\; \frac{\ln n + \ln k}{k\, \ln n} \;=\; \frac{1}{k} + \frac{\ln k}{k} \; \frac{1}{\ln n}$$

wobei

$$\ln n \;\to\; \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+k)}{\ln(n^k)} \;=\; \frac{1}{k}\,.$$

c) Entscheiden Sie, für welche $c \geq 0$ die Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(c - \frac{1}{n}\right)^n}$ konvergiert bzw. divergiert.
Bitte präzise begründen. *[c): 2 P.]*

Wurzelkriterium anwenden:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(c - \tfrac{1}{n}\right)^n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(c - \tfrac{1}{n}\right) \;=\; c$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert für $c < 1$ und divergiert für $c > 1$.

Für $c = 1$ divergiert die Reihe ebenfalls, da die Reihenglieder keine Nullfolge bilden.

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sie die Funktion $\boxed{f\colon [x_0,\infty) \to [y_0,\infty), \quad x \mapsto x + \frac{1}{x}}$ *[a): 2.5 P.]*

Geben Sie kleinstmögliche Werte für $x_0 > 0$ und $y_0 > 0$ an, so dass f bijektiv ist, und bestimmen Sie die entsprechende Umkehrfunktion.

Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x > 0$, und $f(x) = f(1/x)$. Ableiten ergibt

$$f'(x) \;=\; 1 - \frac{1}{x^2} \begin{cases} < 0\,, & 0 < x < 1, \\ = 0\,, & x = 1, \\ > 0\,, & x > 1, \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Für $x_0 = 1$ ist f auf $[x_0,\infty)$ strikt monoton wachsend und daher injektiv.

Mit $f(x_0) = 2 =: y_0$ ist somit $f\colon [x_0,\infty) \to [y_0,\infty)$ bijektiv, da f stetig und $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

Umkehrfunktion: Löse die Gleichung $x + \frac{1}{x} = y$ für $y \geq y_0 = 2$ nach $x > 0$ auf:

$$x + \frac{1}{x} \;=\; y \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - y\,x + 1 \;=\; 0$$

Der rechte Lösungszweig

$$x \;=\; \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{y^2 - 4}\right) \;=\; f^{-1}(y)$$

ergibt die Umkehrfunktion von f $(x \geq x_0 = 1)$.

b) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ aus a) an der Stelle $y = f(2) = \frac{5}{2}$, ohne die explizite Gestalt von f^{-1} (Lösung aus a)) zu verwenden. *[b): 2 P.]*

Ableitungsformel für die Umkehrfunktion:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Mit $f'(x) \;=\; 1 - \frac{1}{x^2}$ ergibt sich

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \;=\; \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\left(f^{-1}(y)\right)^2}}$$

Daher für $y = \frac{5}{2}$, $x = f^{-1}(y) = 2$:

$$\left(f^{-1}\right)'(\tfrac{5}{2}) \;=\; \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2^2}} \;=\; \frac{4}{3}$$

c) Sei f eine differenzierbare Funktion. Geben Sie für $\boxed{\frac{d}{dx}\left(f(x^2)\right)^c \quad (c \in \mathbb{R})}$ einen expliziten Formelausdruck an (in Abhängigkeit von f und f'). *[c): 1.5 P.]*

Aus der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dx}\left(f(x^2)\right)^c \;=\; c\left(f(x^2)\right)^{c-1} \cdot f'(x^2) \cdot 2\,x$$

- **Aufgabe 3.**

a) (i) Geben Sie die Partialbruchzerlegung von $\boxed{\dfrac{1}{1-x^4}}$ an. *[a): 3.5 P.]*

(ii) Berechnen Sie das Integral $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4}}$

(i) Mit $1-x^4 \;=\; (1-x^2)(1+x^2) \;=\; (1-x)(1+x)(1+x^2)$ ergibt sich der Ansatz

$$\frac{1}{1-x^4} \;=\; \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1+x^2}\,,$$

$$1 \;=\; A\,(1+x)(1+x^2) + B\,(1-x)(1+x^2) + C\,(1-x^2)$$

Einsetzen:

$$x=1: \quad 1 \;=\; 4\,A \quad \Rightarrow \quad A \;=\; \frac{1}{4}$$

$$x=-1: \quad 1 \;=\; 4\,B \quad \Rightarrow \quad B \;=\; \frac{1}{4}$$

$$x=0: \quad 1 \;=\; A+B+C \quad \Rightarrow \quad C \;=\; 1-A-B \;=\; \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{1-x^4} \;=\; \frac{1}{4\,(1-x)} + \frac{1}{4\,(1+x)} + \frac{1}{2\,(1+x^2)}$$

(ii) Aus (i):

$$\int \frac{dx}{1-x^4} \;=\; -\frac{1}{4}\,\ln(1-x) + \frac{1}{4}\,\ln(1+x) + \frac{1}{2}\,\arctan x \;+\; C$$

$$\;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{artanh}\, x + \frac{1}{2}\,\arctan x \;+\; C$$

b) Berechnen Sie das Integral $\boxed{\displaystyle\int \frac{\big(\ln(x^2)\big)^n}{x}\,dx \quad (n\in\mathbb{N})}$ *[b): 2.5 P.]*

Mit der Substitution $\ln x = u$, $dx = x\,du$ ergibt sich

$$\int \frac{\big(\ln(x^2)\big)^n}{x}\,dx \;=\; \int \frac{\big(2\,\ln x\big)^n}{x}\,dx \;=\; 2^n\int \frac{\big(\ln x\big)^n}{x}\,dx \;=\; 2^n\int u^n\,du$$

$$\;=\; 2^n\,\frac{u^{n+1}}{n+1} \;=\; \frac{2^n}{n+1}\,\big(\ln x\big)^{n+1} \;+\; C$$