Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2013/14

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (FR, 8.11.2013) *(alle Gruppen, mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{1.\overline{02}}$ *unter Verwendung einer geometrischen Summe* in einen Bruch um. *[a): 2.5 P.]*

$$\begin{aligned} 1.\overline{02} &= 1 + \frac{2}{100} + \frac{2}{10000} + \dots \\ &= 1 + 2\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n \\ &= 1 + 2\,\frac{1/100}{1 - 1/100} = 1 + 2\,\frac{1}{99} = \frac{101}{99} \end{aligned}$$

b) Sei $0 \le k < n$. Geben Sie eine möglichst einfache Formel an für den Wert von $\boxed{\binom{n+1}{k} \Big/ \binom{n}{k+1}}$ *[b): 1.5 P.]*

$$\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}}{\dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}} = \frac{(n+1)!\,(k+1)!\,(n-k-1)!}{n!\,k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)(k+1)}{(n-k)(n-k+1)}$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Drücken Sie den Wert von $\boxed{\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1}}$ mittels eines *Binomialkoeffizienten* aus. *[c): 2 P.]*

Hinweis: Sie sollen hier nicht Induktion verwenden, sondern das 'Muster' richtig erkennen.

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k-1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdots \frac{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)!\,/\,2}{(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

d) Beweisen Sie Ihr Resultat aus c) mittels vollständiger Induktion (Induktionsanfang bei $n = 1$). *[d): 1 Extra-P.]*

- Induktionsanfang ($n = 1$): leeres Produkt $= 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \frac{k+1}{k-1} \overset{\text{ind}}{=} \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n+2}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \binom{n+2}{2} \quad ✓$$

- **Aufgabe 2.**

a) Berechnen Sie den Wert der Summe $\boxed{\sum_{k=0}^{n} 2^k\, 3^{n-k}}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Das Ergebnis ist als *Differenz zweier natürlicher Zahlen* darzustellen. *[a): 3 P.]*

Umformen auf geometrische Summe:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\, 3^{n-k} \;=\; 3^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k \;=\; 3^n\, \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} \;=\; \frac{\frac{2^{n+1}}{3} - 3^n}{-\frac{1}{3}} \;=\; 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Zahl $\boxed{6^n - 1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar ist.

[b): 3 P.]

- Induktionsanfang $(n = 1)$: $6^1 - 1 \;=\; 5$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} 6^{n+1} - 1 \;&=\; \left(6^{n+1} - 6^n\right) + \left(6^n - 1\right) \\ &=\; (6-1)\, 6^n + \left(6^n - 1\right) \\ &\overset{\text{ind}}{=}\; 5 \cdot 6^n + 5\,k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \quad 6^{n+1} - 1 \;&\text{ ist ebenfalls durch 5 teilbar.} \quad ✓ \end{aligned}$$

c) Formulieren Sie eine naheliegende Verallgemeinerung der Aussage aus b), die offenbar auch richtig ist, mitsamt Beweis. *[c): 2 <u>Extra</u>-P.]*

Aussage: *Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $(m+1)^n - 1$ durch m teilbar.*

Beweis analog wie für $m = 5$:

- Induktionsanfang $(n = 1)$: $(m+1)^1 - 1 \;=\; m$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} (m+1)^{n+1} - 1 \;&=\; \left((m+1)^{n+1} - (m+1)^n\right) + \left((m+1)^n - 1\right) \\ &=\; (m+1-1)\,(m+1)^n + \left((m+1)^n - 1\right) \\ &\overset{\text{ind}}{=}\; m \cdot (m+1)^n + m\,k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \quad ✓ \end{aligned}$$

- **Aufgabe 3.**

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie für den Wert von $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^n}{2^k}\binom{n}{k}}$ einen möglichst einfachen Formelausdruck an. *[a): 1.5 P.]*

Binomischer Lehrsatz $\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^n}{2^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k\, 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$$

b) Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1}\, a_n\,, \quad n \geq 1}$

Entscheiden Sie, ob $\{a_n\}$ eine Nullfolge ist. *[b): 1.5 P.]*

Es gilt

$$a_2 = \frac{1}{2}\, a_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad a_3 = \frac{2}{3}\, a_2 = \frac{1}{3}\,, \qquad a_4 = \frac{3}{4}\, a_3 = \frac{1}{4}\,, \qquad \text{usw.}$$

Also mittels offensichtlichen Induktionsargument:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \quad \text{ist Nullfolge.}$$

c) Untersuchen Sie die Funktion $\boxed{f\colon \mathbb{N} \to A\,, \quad f(n) = \frac{n-1}{n+1}}$ auf *Injektivität* und *Surjektivität*.

Hier ist $A := \{a = p/q \in \mathbb{Q} : \; q = p+2\}$. *[c): 3 P.]*

- f ist injektiv:

$$\begin{aligned} f(n) = f(m) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n+1} = \frac{m-1}{m+1} \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)(m+1) = (m-1)(n+1) \\ &\Leftrightarrow \quad (n-1)(m+1) = (m-1)(n+1) \\ &\Leftrightarrow \quad nm + n - m - 1 = mn + m - n - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad n - m = m - n \quad \Leftrightarrow \quad n - m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = m \end{aligned}$$

Oder: Man argumentiert, dass f 'strikt monoton wachsend' ist, d.h.

$$f(n+1) = \frac{n}{n+2} > \frac{n-1}{n+1} = f(n)$$

wegen

$$\underbrace{n(n+1)}_{n^2+n} > \underbrace{(n-1)(n+2)}_{n^2+n-2}\,.$$

Oder ganz direkt:

$$f(n) = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \quad \text{strikt monoton wachsend.}$$

- f ist nicht surjektiv, weil nicht jedes $a \in A$ als Funktionswert angenommen wird (z.B. $a = 0$).

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2013/14

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (FR, 8.11.2013) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ so dass $\boxed{5^n - 1 = 4\,k}$

[a): 3 P.]

Anders ausgedrückt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $5^n - 1$ durch 4 teilbar.

- Induktionsanfang $(n = 1)$: $5^1 - 1 = 4$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} 5^{n+1} - 1 &= \left(5^{n+1} - 5^n\right) + \left(5^n - 1\right) \\ &= (5-1)\,5^n + \left(5^n - 1\right) \\ &\overset{\text{ind}}{=} 4 \cdot 5^n + 4\,k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \quad 5^{n+1} - 1 &= 4\,(5^n + k) \quad ✓ \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie den Wert der Summe $\boxed{\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}\, 2^{n-k}}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

(Beachten Sie: Summation beginnt bei $k = 1$, nicht 0.)

Das Ergebnis ist als *Differenz zweier natürlicher Zahlen* darzustellen. *[b): 3 P.]*

Umformen auf geometrische Summe:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}\, 2^{n-k} &= \frac{2^n}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{2^n}{3} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{2^n}{3}\,\frac{3}{2}\,\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2}} \\ &= 2^n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right) = 3^n - 2^n \end{aligned}$$

c) Formulieren Sie eine naheliegende Verallgemeinerung der Aussage aus a), die offenbar auch richtig ist, mitsamt Beweis. *[c): 2 <u>Extra</u>-P.]*

Aussage: *Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $(m+1)^n - 1$ durch m teilbar.*

Beweis analog wie für $m = 4$:

- Induktionsanfang $(n = 1)$: $(m+1)^1 - 1 = m$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} (m+1)^{n+1} - 1 &= \left((m+1)^{n+1} - (m+1)^n\right) + \left((m+1)^n - 1\right) \\ &= (m+1-1)\,(m+1)^n + \left((m+1)^n - 1\right) \\ &\overset{\text{ind}}{=} m \cdot (m+1)^n + m\,k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \quad ✓ \end{aligned}$$

- **Aufgabe 2.**

a) Die Folge $\{x_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{n-1}\,, \quad n > 1}$

Entscheiden Sie, ob $\{x_n\}$ eine Nullfolge ist. *[a): 1.5 P.]*

Es gilt

$$x_2 = \frac{1}{2}\,x_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad x_3 = \frac{2}{3}\,x_2 = \frac{1}{3}\,, \qquad x_4 = \frac{3}{4}\,x_3 = \frac{1}{4}\,, \qquad \text{usw.}$$

Also mittels offensichtlichen Induktionsargument:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} \quad \text{ist Nullfolge.}$$

b) Untersuchen Sie die Funktion $\boxed{f\colon \mathbb{N} \to A\,, \quad f(k) = \frac{1 - \frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k}}}$ auf *Injektivität* und *Surjektivität*.

Hier ist $A := \{a = p/q \in \mathbb{Q} : p = q - 2\}$. *[b): 3 P.]*

- $f(k) = \dfrac{k-1}{k+1}$ (also $f : \mathbb{N} \to A$) ist injektiv:

$$\begin{aligned} f(k) = f(\ell) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{k-1}{k+1} = \frac{\ell-1}{\ell+1} \quad \Leftrightarrow \quad (k-1)(\ell+1) = (\ell-1)(k+1) \\ &\Leftrightarrow \quad (k-1)(\ell+1) = (\ell-1)(k+1) \\ &\Leftrightarrow \quad k\,\ell + k - \ell - 1 = \ell\,k + \ell - k - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad k - \ell = \ell - k \quad \Leftrightarrow \quad k - \ell = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \ell \end{aligned}$$

Oder: Man argumentiert, dass f 'strikt monoton wachsend' ist, d.h.

$$f(k+1) = \frac{k}{k+2} > \frac{k-1}{k+1} = f(k)$$

wegen

$$\underbrace{k(k+1)}_{k^2+k} > \underbrace{(k-1)(k+2)}_{k^2+k-2}\,.$$

Oder ganz direkt:

$$f(k) = \frac{k+1-2}{k+1} = 1 - \frac{2}{k+1} \quad \text{strikt monoton wachsend.}$$

- f ist nicht surjektiv, weil nicht jedes $a \in A$ als Funktionswert angenommen wird (z.B. $a = 0$).

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie für den Wert von $\boxed{\sum_{k=0}^{n} n^k \binom{n}{k}}$ einen möglichst einfachen Formelausdruck an.

[c): 1.5 P.]

Binomischer Lehrsatz $\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} n^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k\, 1^{n-k} = (n+1)^n$$

- **Aufgabe 3.**

a) Sei $0 \le k < n-1$. Geben Sie eine möglichst einfache Formel an für den Wert von $\boxed{\binom{n}{k} \Big/ \binom{n-1}{k+1}}$

[a): 1.5 P.]

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k+1}} = \frac{\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}{\dfrac{(n-1)!}{(k+1)!\,(n-1-k-1)!}} = \frac{n!\,(k+1)!\,(n-k-2)!}{(n-1)!\,k!\,(n-k)!} = \frac{n(k+1)}{(n-k)(n-k-1)}$$

b) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{1.\overline{05}}$ *unter Verwendung einer geometrischen Summe* in einen Bruch um.

[b): 2.5 P.]

$$\begin{aligned} 1.\overline{05} &= 1 + \frac{5}{100} + \frac{5}{10000} + \dots \\ &= 1 + 5\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots\right) = 1 + 5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n \\ &= 1 + 5\,\frac{1/100}{1 - 1/100} = 1 + 5\,\frac{1}{99} = \frac{104}{99} \end{aligned}$$

c) Sei $m \in \mathbb{N}$. Drücken Sie den Wert von $\boxed{\prod_{n=1}^{m-1} \frac{n+2}{n}}$ mittels eines *Binomialkoeffizienten* aus.

[c): 2 P.]

Hinweis: Sie sollen hier nicht Induktion verwenden, sondern das 'Muster' richtig erkennen.

$$\prod_{n=1}^{m-1} \frac{n+2}{n} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdots \frac{m+1}{m-1} = \frac{(m+1)!\,/\,2}{(m-1)!} = \frac{m(m+1)}{2} = \binom{m+1}{2}$$

d) Beweisen Sie Ihr Resultat aus c) mittels vollständiger Induktion (Induktionsanfang bei $m = 1$).

[d): 1 <u>Extra</u>-P.]

- Induktionsanfang ($m = 1$): leeres Produkt $= 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓
- Induktionsschluss $m \mapsto m+1$:

$$\prod_{n=1}^{m} \frac{n+2}{n} \overset{\text{ind}}{=} \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{m+2}{m} = \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \binom{m+2}{2} \quad ✓$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2013/14

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (FR, 8.11.2013) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Untersuchen Sie die Funktion $\boxed{f\colon \mathbb{N} \to A\,, \quad f(n) \;=\; \dfrac{c\,n}{n+1}}$ auf *Injektivität* und *Surjektivität*.

Hier ist $c \in \mathbb{N}$ fest gewählt und $A := \{a = p/q \in \mathbb{Q} : \; p = c\,(q-1)\}$. *[a): 3 P.]*

- f ist injektiv:

$$f(n) = f(m) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c\,n}{n+1} \;=\; \frac{c\,m}{m+1} \quad \Leftrightarrow \quad n(m+1) \;=\; m(n+1)$$
$$\Leftrightarrow \quad nm + n \;=\; mn + m \quad \Leftrightarrow \quad n = m$$

Oder: Man argumentiert, dass f 'strikt monoton wachsend' ist, d.h.

$$f(n+1) \;=\; c\,\frac{n+1}{n+2} \;>\; c\,\frac{n}{n+1} \;=\; f(n)$$

wegen

$$\underbrace{(n+1)^2}_{n^2+2\,n+1} \;>\; \underbrace{n(n+2)}_{n^2+2\,n}\,.$$

Oder ganz direkt:

$$f(n) \;=\; c\,\frac{n+1-1}{n+1} \;=\; c - \frac{c}{n+1} \quad \text{strikt monoton wachsend.}$$

- f ist nicht surjektiv, weil nicht jedes $a \in A$ als Funktionswert angenommen wird (z.B. $a = 0$).

b) Die Folge $\{b_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{b_1 = 2 \quad \text{und} \quad b_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}\,b_n\,, \quad n \geq 1}$

Entscheiden Sie, ob $\{b_n\}$ eine Nullfolge ist. *[b): 1.5 P.]*

Es gilt

$$b_2 \;=\; \frac{2}{3}\,b_1 \;=\; \frac{1}{3}\,, \qquad b_3 \;=\; \frac{3}{4}\,b_2 \;=\; \frac{1}{4}\,, \qquad b_4 \;=\; \frac{4}{5}\,b_3 \;=\; \frac{1}{5}\,, \qquad \text{usw.}$$

Also mittels offensichtlichen Induktionsargument:

$$\{b_n\} \;=\; \left\{\frac{1}{n+1}\right\} \quad \text{ist Nullfolge.}$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie für den Wert von $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (x-1)^{n-k} \binom{n}{k}}$ einen möglichst einfachen Formelausdruck an. *[c): 1.5 P.]*

Binomischer Lehrsatz $\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} (x-1)^{n-k} \binom{n}{k} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k\,(x-1)^{n-k} \;=\; \big(1 + (x-1)\big)^n \;=\; x^n$$

- **Aufgabe 2.**

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Drücken Sie den Wert von $\boxed{\prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i+1}}$ mittels eines *Binomialkoeffizienten* aus.

[a): 2 P.]

Hinweis: Sie sollen hier nicht Induktion verwenden, sondern das 'Muster' richtig erkennen.

$$\prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdots \frac{n-1}{n+1} = \frac{(n-1)!}{(n+1)!\,/\,2} = \frac{2}{n(n+1)} = \binom{n+1}{2}^{-1}$$

b) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{2.\overline{8}}$ *unter Verwendung einer geometrischen Summe* in einen Bruch um.

[b): 2.5 P.]

$$\begin{aligned} 2.\overline{8} &= 2 + \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \dots \\ &= 2 + 8\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots\right) = 2 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \\ &= 2 + 8\,\frac{1/10}{1 - 1/10} = 2 + 8\,\frac{1}{9} = \frac{26}{9} \end{aligned}$$

c) Sei $0 \le k < n$. Geben Sie eine möglichst einfache Formel an für den Wert von $\boxed{\binom{n}{k+1} \Big/ \binom{n+1}{k}}$

[c): 1.5 P.]

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n+1}{k}} = \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}}{\dfrac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}} = \frac{n!\,k!\,(n-k+1)!}{(n+1)!\,(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{(n+1)(k+1)}$$

d) Beweisen Sie Ihr Resultat aus a) mittels vollständiger Induktion (Induktionsanfang bei $n = 1$).

[d): 1 <u>Extra</u>-P.]

- Induktionsanfang ($n = 1$): leeres Produkt $= 1 = \binom{2}{2}^{-1}$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\prod_{i=2}^{n+1} \frac{i-1}{i+1} \overset{\text{ind}}{=} \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n}{n+2} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \binom{n+2}{2}^{-1} \quad ✓$$

- **Aufgabe 3.**

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $\boxed{\dfrac{7^n - 1}{6} \in \mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *[a): 3 P.]*

Anders ausgedrückt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $7^n - 1$ durch 6 teilbar.

- Induktionsanfang ($n = 1$): $7^1 - 1 = 6$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} 7^{n+1} - 1 &= \left(7^{n+1} - 7^n\right) + \left(7^n - 1\right) \\ &= (7-1)\,7^n + \left(7^n - 1\right) \\ &\overset{\text{ind}}{=} 6 \cdot 7^n + 6\,k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \quad 7^{n+1} - 1 &\text{ ist ebenfalls durch 6 teilbar.} \quad ✓ \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie den Wert der Summe $\boxed{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 3^i\, 2^{n-1-i}}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Das Ergebnis ist als *Differenz zweier natürlicher Zahlen* darzustellen. *[b): 3 P.]*

Umformen auf geometrische Summe:

$$\sum_{i=0}^{n-1} 3^i\, 2^{n-1-i} = 2^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i = 2^{n-1} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}\,3^n - \frac{1}{2}\,2^n}{\frac{1}{2}} = 3^n - 2^n$$

c) Formulieren Sie eine naheliegende Verallgemeinerung der Aussage aus a), die offenbar auch richtig ist, mitsamt Beweis. *[c): 2 <u>Extra</u>-P.]*

Aussage: *Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $(m+1)^n - 1$ durch m teilbar.*

Beweis analog wie für $m = 6$:

- Induktionsanfang ($n = 1$): $(m+1)^1 - 1 = m$ ✓
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} (m+1)^{n+1} - 1 &= \left((m+1)^{n+1} - (m+1)^n\right) + \left((m+1)^n - 1\right) \\ &= (m+1-1)\,(m+1)^n + \left((m+1)^n - 1\right) \\ &\overset{\text{ind}}{=} m \cdot (m+1)^n + m\,k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \quad ✓ \end{aligned}$$