Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2013/14

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (FR, 10.01.2014) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Berechnen Sie mittels der Regel von de l'Hospital: $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{3x-\sin(3x)}{x^3}}$ *[a): 1.5 P.]*

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin(3x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{3-3\cos(3x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{9\sin(3x)}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{27\cos(3x)}{6} = \frac{9}{2}.$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $\boxed{1-\cos x \le |x|}$ für alle $x\in\mathbb{R}$. *[b): 1.5 P.]*

Mit $f(x) := 1-\cos x$ gilt $f'(x) = \sin x$. Mit dem Mittelwertsatz folgt, dass ein $\xi \in (x_0, x)$ existiert, so dass gilt:

$$(x-x_0)\sin\xi = -\cos x + \cos x_0.$$

Insbesondere gilt für $x_0 = 0 : 1-\cos x = x\sin\xi$. Mit $x\sin\xi \le |x\sin\xi| \le |x|$ folgt die Behauptung.

c) Gegeben sei die Funktion $\boxed{f(x) = x\ln x^b\,, \quad x>0\,, \quad b\in\mathbb{R}\,, \quad b\neq 0}$.
Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0+} f(x)$. *[c): 1.5 P.]*

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x^b = \lim_{x\to 0+}\frac{b\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{b}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

d) An welcher Stelle x_0 hat die Funktion f aus Aufgabe c) die Steigung $f'(x_0) = 3\,b$?
Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x)$ an dieser Stelle x_0 an. *[d): 1.5 P.]*

$$f'(x) = b\,(\ln x + 1)$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = 3\,b \Leftrightarrow b\,(\ln x_0 + 1) = 3\,b$$
$$\Leftrightarrow \ln x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = e^2.$$

$f(x_0) = 2\,be^2$, also ist die Gleichung der Tangente $t(x)$ gegeben durch $t(x) = 3\,bx - be^2$.

- **Aufgabe 2.**

a) Bestimmen Sie die Polstellen und die Nullstellen von $\boxed{h(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-1)(x^2+2x-3)}}$ und deren Ordnungen in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$. *[a): 3 P.]*

$$h(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-1)^2(x+3)}$$

$a,\ b \notin \{1, -3\}$

$x = 1$ Pol der Ordnung 2, $x = -3$ Pol der Ordnung 1

$a \neq b \ \Rightarrow\ x = a,\ x = b$ Nullstellen der Ordnung 1.

$a = b \ \Rightarrow\ x = a = b$ Nullstelle der Ordnung 2.

$a = 1,\ b \notin \{1, -3\}$

$x = 1$ Pol der Ordnung 1, $x = -3$ Pol der Ordnung 1.

$x = b$ Nullstelle der Ordnung 1.

$a = -3,\ b \notin \{1, -3\}$

$x = 1$ Pol der Ordnung 2.

$x = b$ Nullstelle der Ordnung 1.

$a = 1,\ b = -3$

$x = 1$ Pol der Ordnung 1.

Es gibt keine Nullstellen.

$a = b = 1$

$x = -3$ Pol der Ordnung 1.

Es gibt keine Nullstellen.

$a = b = -3$

$x = 1$ Pol der Ordnung 2.

$x = -3$ Nullstelle der Ordnung 1.

b) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $\boxed{g(x) = \dfrac{1-x^2}{x^3-3x^2+3x-1}}$. *[b): 1 P.]*

Partialbruchzerlegung für $\frac{1-x^2}{(x-1)^3}$:

$$\frac{1-x^2}{(x-1)^3} = \frac{-x-1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$
$$\Leftrightarrow\ A = -1 \quad B = -2$$

Dann ist $g(x) = -\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}$.

c) Zeigen Sie, dass sich $\boxed{f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x - 1}}$ in $x = 1$ stetig fortsetzen lässt und dass die Funktion f auf $[a, b]$ Lipschitz–stetig ist. Bestimmen Sie auch die Lipschitzkonstante. *[c): 2 P.]*

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2+4)}{x - 1} = x^2 + 4$$

f lässt sich in $x = 1$ stetig fortsetzen und hat den Wert $f(1) = 5$.

Alternativ $\lim_{x\to 1} f(x)$ mit de l'Hospital berechnen.

Lipschitzkonstante auf $[a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| \leq 2\{\max |a|, |b|\}|x - y|$$

f ist also Lipschitz–stetig mit Lipschitzkonstante $L = 2\{\max |a|, |b|\}$.

d) Zeigen Sie, dass die Funktion f aus c) nicht Lipschitz–stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$. *[d): 1 **Extra-P.**]*

Für alle $L > 0$ und x, $y > \frac{L}{2}$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| > L|x - y|$$

- **Aufgabe 3.**

a) Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{2^n\, n!}}$. *[a): 2 P.]*

Quotientenkriterium in Grenzwertform:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}\,(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n\, n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)\,2^n\,n!}{n^n\,2^{n+1}(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1 \;\Rightarrow\; \text{Divergenz}$$

b) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}}$. *[b): 2 P.]*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)(k-1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots\ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

c) Für welche $y \in \mathbb{R}$, konvergiert die Reihe $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(2y)^{2k+1}}$? *[c): 2 P.]*

Wir führen die gegebene Reihe auf eine geometrische Reihe mit $q = -4y^2$ zurück:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(2y)^{2k+1} = 2y\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(2y)^{2k} = 2y\sum_{k=0}^{\infty} (-4y^2)^k$$

Diese Reihe konvergiert für $|q| < 1$, also für $y \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

d) Berechnen Sie im Fall von Konvergenz den Grenzwert der Reihe aus c). *[d): 1 **Extra-P.**]*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(2y)^{2k+1} = 2y\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(2y)^{2k} = 2y\sum_{k=0}^{\infty} (-4y^2)^k = \frac{2y}{1-(-4y^2)} = \frac{2y}{1+4y^2}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (FR, 10.01.2014) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$, konvergiert die Reihe $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, (2x)^{2k+1}}$? *[a): 2 P.]*

Wir führen die gegebene Reihe auf eine geometrische Reihe mit $q = -4x^2$ zurück:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, (2x)^{2k+1} = 2x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, (2x)^{2k} = 2x \sum_{k=0}^{\infty} (-4x^2)^k$$

Diese Reihe konvergiert für $|q| < 1$, also für $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Berechnen Sie im Fall von Konvergenz den Grenzwert der Reihe aus a) . *[b): 1* **Extra-P.** *]*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, (2x)^{2k+1} = 2x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, (2x)^{2k} = 2x \sum_{k=0}^{\infty} (-4x^2)^k = \frac{2x}{1-(-4x^2)} = \frac{2x}{1+4x^2}$$

c) Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \, n!}}$. *[c): 2 P.]*

Quotientenkriterium in Grenzwertform:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}\,(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n\,n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)\, 2^n \, n!}{n^n \, 2^{n+1} (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow \text{ Divergenz}$$

d) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}}$. *[d): 2 P.]*

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots\ldots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

- **Aufgabe 2.**

a) Berechnen Sie mittels der Regel von de l'Hospital: $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{2x-\sin(2x)}{3x^3}}$ *[a): 1.5 P.]*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x-\sin(2x)}{3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos(2x)}{9x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\sin(2x)}{18x} = \lim_{x\to 0} \frac{8\cos(2x)}{18} = \frac{4}{9}$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $\boxed{1-\cos(2x) \le 2|x|}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *[b): 1.5 P.]*

Mit $f(x) := 1-\cos(2x)$ gilt $f'(x) = 2\sin(2x)$. Mit dem Mittelwertsatz folgt, dass ein $\xi \in (x_0, x)$ existiert, so dass gilt:

$$(x-x_0)2\sin(2\xi) = -\cos(2x) + \cos(2x_0).$$

Insbesondere gilt für $x_0 = 0 : 1-\cos(2x) = 2x\sin(2\xi)$. Mit $2x\sin(2\xi) \le 2|x\sin(2\xi)| \le 2|x|$ folgt die Behauptung.

c) Gegeben sei die Funktion $\boxed{f(x) = x\ln x^{3a}, \quad x>0, \quad a\in\mathbb{R}, \quad a\neq 0}$.
Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0+} f(x)$. *[c): 1.5 P.]*

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x^{3a} = \lim_{x\to 0+} \frac{3\,a\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{3\,a}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

d) An welcher Stelle x_0 hat die Funktion f aus Aufgabe c) die Steigung $f'(x_0) = 15\,a$?
Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion f an dieser Stelle x_0 an. *[d): 1.5 P.]*

$$f'(x) = 3\,a(\ln x + 1)$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = 15\,a \Leftrightarrow 3\,a(\ln x_0 + 1) = 15\,a$$
$$\Leftrightarrow \ln x_0 = 4 \Leftrightarrow x_0 = e^4$$

$f(x_0) = 12\,ae^4$, also ist die Gleichung der Tangente $t(x)$ gegeben durch $t(x) = 15\,ax - 3ae^4$.

- **Aufgabe 3.**

a) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $\boxed{g(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}}$.

[a): 1 P.]

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)^3} = \frac{x-2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad A = 1 \qquad B = -3$$

Dann ist $g(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}$.

b) Zeigen Sie, dass sich $\boxed{f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}{x - 2}}$ in $x = 2$ stetig fortsetzen lässt und dass die Funktion f auf $[a, b]$ Lipschitz–stetig ist. Bestimmen Sie auch die Lipschitzkonstante. *[b): 2 P.]*

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x^2+2)}{x-2} = x^2 + 2$$

f lässt sich in $x = 2$ stetig fortsetzen und hat den Wert $f(2) = 6$.

Alternativ $\lim_{x\to 2} f(x)$ mit de l'Hospital berechnen.

Lipschitzkonstante auf $[a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| \le 2\{\max |a|, |b|\}\, |x - y|$$

f ist also Lipschitz–stetig mit Lipschitzkonstante $L = 2\{\max |a|, |b|\}$.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion f aus b) nicht Lipschitz–stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$. *[c): 1 **Extra-P.**]*

Für alle $L > 0$ und $x,\ y > \frac{L}{2}$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| > L|x-y|$$

d) Bestimmen Sie die Polstellen und die Nullstellen von $\boxed{h(x) = \frac{(x-c)(x-d)}{(x+1)(x^2-3x-4)}}$ und deren Ordnungen in Abhängigkeit von $c, d \in \mathbb{R}$. *[d): 3 P.]*

$$h(x) = \frac{(x-c)(x-d)}{(x+1)^2(x-4)}$$

$c,\ d \notin \{-1, 4\}$

$x = -1$ Pol der Ordnung 2, $x = 4$ Pol der Ordnung 1
$c \neq d \;\Rightarrow\; x = c,\ x = d$ Nullstellen der Ordnung 1
$c = d \;\Rightarrow\; x = c = d$ Nullstelle der Ordnung 2

$c = -1,\ d \notin \{-1, 4\}$

$x = -1$ Pol der Ordnung 1, $x = 4$ Pol der Ordnung 1
$x = d$ Nullstelle der Ordnung 1

$c = 4,\ d \notin \{-1, 4\}$

$x = -1$ Pol der Ordnung 2
$x = d$ Nullstelle der Ordnung 1

$c = -1,\ d = 4$

$x = -1$ Pol der Ordnung 1
Es gibt keine Nullstellen.

$c = d = -1$

$x = 4$ Pol der Ordnung 1
Es gibt keine Nullstellen.

$c = d = 4$

$x = -1$ Pol der Ordnung 2.
$x = 4$ Nullstelle der Ordnung 1.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger, G. Schranz-Kirlinger

TU Wien
WS 2013/2014

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (FR, 10.01.2014) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Zeigen Sie, dass sich $\boxed{h(x) = \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{x+1}}$ in $x = -1$ stetig fortsetzen lässt und dass die Funktion h auf $[c, d]$ Lipschitz–stetig ist. Bestimmen Sie auch die Lipschitzkonstante. *[a): 1 P.]*

$$h(x) = \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2-3)}{x+1} = x^2 - 3$$

h lässt sich in $x = -1$ stetig fortsetzen und hat den Wert $h(-1) = -2$.

Alternativ $\lim_{x \to -1} h(x)$ mit de l'Hospital berechnen.

Lipschitzkonstante auf $[c, d]$:

$$|h(x) - h(y)| = |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| \leq 2\{\max |c|, |d|\}|x - y|$$

h ist also Lipschitz–stetig mit Lipschitzkonstante $L = 2\{\max |c|, |d|\}$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion h aus a) nicht Lipschitz–stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$. *[b): 1* ***Extra-P.*** *]*

Für alle $L > 0$ und $x,\ y\ > \frac{L}{2}$ gilt:

$$|h(x) - h(y)| = |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| > L|x - y|$$

c) Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $\boxed{f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}}$.

[c): 2 P.]

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)^3} = \frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = 1 \quad B = 2$$

Dann ist $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$.

d) Bestimmen Sie die Polstellen und die Nullstellen von $\boxed{g(x) = \dfrac{(x-p)(x-q)}{(x-2)(x^2-x-2)}}$ und deren Ordnungen in Abhängigkeit von $p, q \in \mathbb{R}$. *[d): 3 P.]*

$$g(x) = \frac{(x-p)(x-q)}{(x-2)^2(x+1)}$$

$p,\ q \notin \{-1, 2\}$

$x = -1$ Pol der Ordnung 1, $x = 2$ Pol der Ordnung 2

$p \neq q \;\Rightarrow\; x = p,\ x = q$ Nullstellen der Ordnung 1

$p = q \;\Rightarrow\; x = p = q$ Nullstelle der Ordnung 2

$p = 2,\ q \notin \{-1, 2\}$

$x = 2$ Pol der Ordnung 1, $x = -1$ Pol der Ordnung 1

$x = q$ Nullstelle der Ordnung 1

$p = -1,\ q \notin \{-1, 2\}$

$x = 2$ Pol der Ordnung 2

$x = q$ Nullstelle der Ordnung 1

$p = -1,\ q = 2$

$x = 2$ Pol der Ordnung 1

Es gibt keine Nullstellen.

$p = q = 2$

$x = -1$ Pol der Ordnung 1

Es gibt keine Nullstellen.

$p = q = -1$

$x = 2$ Pol der Ordnung 2

$x = -1$ Nullstelle der Ordnung 1

- **Aufgabe 2.**

a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}}$. *[a): 2 P.]*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)(k-1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

b) Für welche $y \in \mathbb{R}$, konvergiert die Reihe $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(3y)^{2k+1}}$? *[b): 2 P.]*

Wir führen die gegebene Reihe auf eine geometrische Reihe mit $q = -9y^2$ zurück:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(3y)^{2k+1} = 3y\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(3y)^{2k} = 3y\sum_{k=0}^{\infty} (-9y^2)^k$$

Diese Reihe konvergiert für $|q| < 1$, also für $y \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

c) Berechnen Sie im Fall von Konvergenz den Grenzwert der Reihe aus b) . *[c): 1 **Extra-P.**]*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(3y)^{2k+1} = 3y\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(3y)^{2k} = 3y\sum_{k=0}^{\infty} (-9y^2)^k = \frac{3y}{1-(-9y^2)} = \frac{3y}{1+9y^2}$$

d) Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihe $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{2^k\,k!}}$. *[d): 2 P.]*

Quotientenkriterium in Grenzwertform:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}\,(k+1)!}}{\frac{k^k}{2^k\,k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k(k+1)\,2^k\,k!}{k^k\,2^{k+1}(k+1)!} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{e}{2} > 1 \;\Rightarrow\; \text{Divergenz}$$

- **Aufgabe 3.**

a) Gegeben sei die Funktion $\boxed{f(x) = x\ln x^{2b}\,, \quad x>0\,, \quad b\in\mathbb{R}\,, \quad b\neq 0}$.
Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0+} f(x)$. *[a): 1.5 P.]*

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x^{2b} = \lim_{x\to 0+}\frac{2\,b\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\cong} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{2\,b}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

b) An welcher Stelle x_0 hat die Funktion f aus Aufgabe a) die Steigung $f'(x_0) = 4\,b$?
Geben Sie die Gleichung der Tangente an die Funktion f an dieser Stelle x_0 an. *[b): 1.5 P.]*

$$f'(x) = 2\,b(\ln x + 1)$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = 4\,b \Leftrightarrow 2\,b(\ln x_0 + 1) = 4\,b$$
$$\Leftrightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$$

$f(x_0) = 2\,be$, also ist die Gleichung der Tangente $t(x)$ gegeben durch $t(x) = 4\,bx - 2be$.

c) Berechnen Sie mittels der Regel von de l'Hospital: $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{5x-\sin(5x)}{2x^3}}$ *[c): 1.5 P.]*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{5x-\sin(5x)}{2x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{5-5\cos(5x)}{6x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{25\sin(5x)}{12x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{125\cos(5x)}{12} = \frac{125}{12}\end{aligned}$$

d) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $\boxed{\sin x \leq |x|}$ für alle $x\in\mathbb{R}$. *[d): 1.5 P.]*

Mit $f(x) := \sin x$ gilt $f'(x) = \cos x$. Mit dem Mittelwertsatz folgt: es existiert ein $\xi \in (x_0, x)$, so dass gilt:

$$(x - x_0)\cos\xi = \sin x - \sin x_0.$$

Insbesondere gilt für $x_0 = 0 : \sin x = x\cos\xi$. Mit $x\cos\xi \leq |x\cos\xi| \leq |x|$ folgt die Behauptung.