Wie lautet die logische Negation der folgenden (wahren) Aussage?

Jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade,
und keine natürliche Zahl ist sowohl gerade als auch ungerade.

Drücken Sie die gegebene Aussage auch in der Sprache der formalen Logik aus (unter Verwendung von $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$).

Anmerkung: 'n gerade' drückt man formelmäßig aus als $n \bmod 2 = 0$, wobei $n \bmod m$ ('modulo') = Rest bei Division von n durch m.

- Einfacher formuliert:

  Jede natürliche Zahl ist <u>entweder</u> gerade <u>oder</u> ungerade.

  (im Sinne des ausschließenden oder)

- Logische Umkehrung:

  Es gibt (mindestens) eine natürliche Zahl,
  die weder gerade noch ungerade ist
  oder die sowohl gerade als auch ungerade ist.

  Beachte: Dies ist eine korrekt formulierte Aussage (unabhängig von ihrem Wahrheitsgehalt).

- Die Aussage formal ausgedrückt:

$$\big(\forall\, n \in \mathbb{N} : \ n \bmod 2 = 0 \ \vee \ n \bmod 2 = 1\big)$$
$$\wedge \ \big(\ \nexists\, n \in \mathbb{N} : \ n \bmod 2 = 0 \ \wedge \ n \bmod 2 = 1\big)$$

- Logische Umkehrung:

$$\neg\,\big(\forall\, n \in \mathbb{N} : \ n \bmod 2 = 0 \ \vee \ n \bmod 2 = 1\big)$$
$$\vee\, \neg\,\big(\ \nexists\, n \in \mathbb{N} : \ n \bmod 2 = 0 \ \wedge \ n \bmod 2 = 1\big)$$

$\Leftrightarrow$

$$\big(\exists\, n \in \mathbb{N} : \ n \bmod 2 \neq 0 \ \wedge \ n \bmod 2 \neq 1\big)$$
$$\vee\, \big(\exists\, n \in \mathbb{N} : \ n \bmod 2 = 0 \ \wedge \ n \bmod 2 = 1\big)$$

$\square$

Beweisen Sie die Ungleichungen

a) $x\,y \le \frac{1}{2}\left(\delta\,x^2 + \delta^{-1}\,y^2\right) \qquad (\delta > 0 \text{ beliebig}),$

b) $\sqrt{x\,y} \le \frac{x+y}{2}$

c) $x_1\,y_1 + x_2\,y_2 \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

für beliebige $0 \le x_{[i]}, y_{[i]} \in \mathbb{R}$.

---

a) Behauptung folgt aus

$$0 \le \left(\varepsilon\,x - \varepsilon^{-1}\,y\right)^2 = \varepsilon^2\,x^2 - 2\,x\,y + \varepsilon^{-2}\,y^2$$

mit $\varepsilon = \sqrt{\delta}$.

b) Behauptung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & 4\,x\,y \le (x+y)^2 = x^2 + 2\,x\,y + y^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \le x^2 - 2\,x\,y + y^2 = (x-y)^2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Anmerkung:

b) ist die *Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel.*

c) Behauptung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \left(x_1\,y_1 + x_2\,y_2\right)^2 \le \left(x_1^2 + x_2^2\right) \cdot \left(y_1^2 + y_2^2\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \cancel{x_1^2\,y_1^2} + 2\,x_1\,y_1\,x_2\,y_2 + \cancel{x_2^2\,y_2^2} \le \cancel{x_1^2\,y_1^2} + x_1^2\,y_2^2 + x_2^2\,y_1^2 + \cancel{x_2^2\,y_2^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 2\left(x_1\,y_2\right) \cdot \left(x_2\,y_1\right) \le x_1^2\,y_2^2 + x_2^2\,y_1^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \le \left(x_1\,y_2 - x_2\,y_1\right)^2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Anmerkung: **c)** ist ein Spezialfall der *Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung* (siehe *Lineare Algebra*).

$\square$

Geben Sie einfache Formelausdrücke an (in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$) für die Werte der Summen

$$\textbf{a)}\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad\qquad \textbf{b)}\quad \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} 2^i .$$

---

a) Binomischer Lehrsatz $\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \, 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Siehe Pascal'sches Dreieck!

b) Zweimal geometrische Summenformel anwenden:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} 2^i = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}-1}{2-1} = \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} 1$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{n} 2^k - (n+1) = 2\, \frac{2^{n+1}-1}{2-1} - (n+1)$$

$$= 2^{n+2} - 2 - n - 1 = 2^{n+2} - n - 3$$

$\square$

$(*)$ Beweisen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-4k^2} = \frac{n+1}{2\,n+1} \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Vollständige Induktion:

- $n = 0$ (Induktionsanfang):

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{1-4k^2} = 1 = \frac{0+1}{0+1} \qquad \checkmark$$

- $n \mapsto n+1$ (Induktionsschluss):

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{1-4k^2} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-4k^2} + \frac{1}{1-4\,(n+1)^2} \\ &\overset{\text{IND}}{=} \frac{n+1}{2\,n+1} + \frac{1}{1-4\,(n+1)^2} \\ &= \frac{n+1}{2\,n+1} - \frac{1}{4\,n^2+8\,n+3}\end{aligned}$$

Um auf gleichen Nenner zu bringen, faktorisieren wir (& quadratische Gleichung):

$$\begin{aligned}4\,n^2+8\,n+3 &= 4\left(n^2+2\,n+\tfrac{3}{4}\right) = 4\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\left(n+\tfrac{3}{2}\right) \\ &= \left(2\,n+1\right)\left(2\,n+3\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (mit nochmaliger Faktorisierung):

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{2\,n+1} - \frac{1}{4\,n^2+8\,n+3} &= \frac{n+1}{2\,n+1} - \frac{1}{(2\,n+1)\,(2\,n+3)} \\ &= \frac{(n+1)(2\,n+3)-1}{(2\,n+1)\,(2\,n+3)} \\ &= \frac{2\,n^2+5\,n+2}{(2\,n+1)\,(2\,n+3)} \\ &= \frac{\cancel{(2\,n+1)}\,(n+2)}{\cancel{(2\,n+1)}\,(2\,n+3)} = \frac{(n+1)+1}{2\,(n+1)+1} \qquad \checkmark\end{aligned}$$

$\square$

Zeigen Sie:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

- Binomischer Lehrsatz:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\, \sqrt{3}^{\,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k/2}$$

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\, (-\sqrt{3})^{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\, 3^{k/2}$$

$\Rightarrow$

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+(-1)^k\right) 3^{k/2}$$

Hier ist

$$1+(-1)^k = \begin{cases} 0, & k \text{ ungerade} \\ 2, & k \text{ gerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n = 2 \sum_{k=0,\ k \text{ gerade}}^{n} \binom{n}{k} 3^{k/2} \in \mathbb{N} \qquad \checkmark$$

weil $3^{k/2} \in \mathbb{N}$ für k gerade.

- Beispiel: $n = 2$

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)^2 = \left(1+\cancel{2\sqrt{3}}+3\right) + \left(1-\cancel{2\sqrt{3}}+3\right) = 8$$

- Anmerkung: Beweis zeigt, dass Aussage offenbar allgemeiner gilt:

$$\left(1+\sqrt{m}\right)^n + \left(1-\sqrt{m}\right)^n \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

  für beliebige $m \in \mathbb{N}$.

$\square$

a) Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die der folgenden 'Differenzengleichung' genügt:

$$f(n+1) - f(n) \;=\; n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Geben Sie alle möglichen Lösungsfunktionen $f(n)$ an.

b) Gleiche Frage wie unter **a)**, wobei $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit

$$f(n-1) - 2\,f(n) + f(n+1) \;=\; 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

---

a) Wegen

$$f(n) \;=\; f(n-1) + (n-1)$$

gilt

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + 0 \\ f(2) &= f(1) + 1 \;=\; f(0) + 1 \\ f(3) &= f(2) + 2 \;=\; f(0) + 1 + 2 \\ &\;\;\ldots \end{aligned}$$

Also offenbar (Induktion):

$$f(n) \;=\; f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} k \;=\; f(0) + \frac{n(n-1)}{2}$$

Erst nach (beliebiger) Vorgabe des 'Anfangswertes' $f(0)$ ist f eindeutig festgelegt.

b) Mit

$$f(n-1) - 2\,f(n) + f(n+1) \;=\; \big(f(n+1) - f(n)\big) - \big(f(n) - f(n-1)\big)$$

gilt laut Voraussetzung

$$f(n-1) - 2\,f(n) + f(n+1) \;=\; g(n+1) - g(n) \;\equiv\; 0$$

wobei $g(n) \;:=\; f(n) - f(n-1)$. Daher:

$$f(n) - f(n-1) \;=\; g(n) \;\equiv\; C \;=\; \text{const.}$$

$\Rightarrow$

$$f(n) \;=\; f(n-1) + C \;=\; \big(f(n-2) + C\big) + C \;=\; \ldots$$

$\Rightarrow$

$$f(n) \;=\; C\,n + D \quad \text{(geradlinig)}, \quad \text{mit } C, D = \text{const.}, \quad D = f(0)\,.$$

$\longrightarrow$

Oder anschaulich argumentiert:

$$f(n) \;=\; \frac{f(n-1)+f(n+1)}{2} \quad \text{(arithmetisches Mittel)}$$

Die Funktionswerte liegen also auf einer Geraden.

Anmerkung (kleiner Vorgriff auf Integralrechnung): Man vergleiche a), b) mit

$$f'(x) \;=\; x \quad \Rightarrow \quad f(x) \;=\; f(0) + \int_0^x \xi \, d\xi \;=\; f(0) + \frac{x^2}{2}$$

und

$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; f'(x) \;=\; f'(0) + \int_0^x 0 \, d\xi \;\equiv\; f'(0) = C \,,$$

$$\Rightarrow$$

$\square$

a) Geben Sie für die Menge

$$\{\, n \in \mathbb{N} : \; n^2 - 6\,n + 5 \; < \; n \,\}$$

eine explizite Darstellung an.

b) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(n) := n^2 - 2\,n + 5$$

- wohldefiniert?
- injektiv?
- surjektiv?

---

a) Nachrechnen:

```
n                  |  1    2    3    4    5    6    7   ...
-------------------------------------------------------------
n^2 - 6*n + 5      |  0   -3   -4   -3    0    5   12   ...
```

Also:

$$\{n \in \mathbb{N} : \; n^2 - 6\,n + 5 < n\} \;=\; \{n \in \mathbb{N} : \; n^2 - 7\,n + 5 < 0\} \;=\; \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

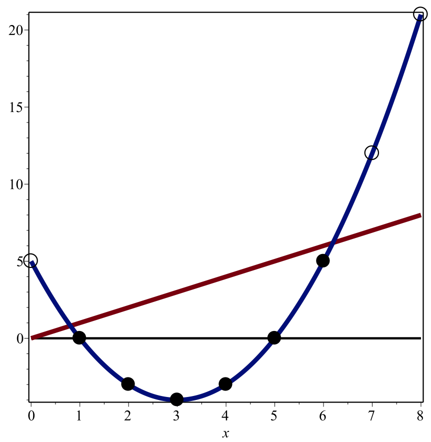
Strenger Beweis: Am einfachsten durch Betrachtung der quadratischen Funktion

$$f(x) \;=\; x^2 - 7\,x + 5$$

mit den Nullstellen

$$x_{1,2} \;=\; \tfrac{7}{2} \mp \tfrac{\sqrt{29}}{2} \;\approx\; 0.807,\; 6.19$$

$f(x)$ ist negativ zwischen x_1 und x_2, ansonsten positiv. ✓



$\longrightarrow$

b) $f(n) = n^2 - 2n + 5$

- wohldefiniert als Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ✓
- injektiv, weil ‘streng monoton wachsend’:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (n+1)^2 - 2(n+1) + 5 \\ &= n^2 + 4 = n^2 - 1 + 5 > f(n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad ✓ \end{aligned}$$

- nicht surjektiv.

□

a) Welche Zahl wird durch die *binäre* Darstellung $0.\overline{1}$ repräsentiert?

b) Wandeln Sie die Dezimalzahl 0.1 in Binärdarstellung um.

c) Zeigen Sie: Jede endliche Binärzahl besitzt eine endliche Dezimaldarstellung. (Die Umkehrung gilt nicht; siehe **b**).)

---

a) Binärentwicklung entspricht geometrischer Reihe:

$$\begin{aligned} 0.\overline{1} &= 0.111\ldots = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

b) Division in Binärarithmetik ($10 = 1010$ binär)

```
  1      /   1010  =  0.00011...
  10
  100
  1000
  10000
-  1010
  ------
   01100
-   1010
  -------
     0100
```

$\Rightarrow$ $0.1 = 0.0\overline{0011}$ – periodischer Binärbruch.

Dies entspricht der geometrischen Reihe (binär $0.0011 = 3/16$):

$$0.1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{16} + \frac{3}{16^2} + \frac{3}{16^3} + \ldots\right) = \frac{3}{2}\,\frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{15} = \frac{1}{10}\,.$$

c) Wegen

$$\tfrac{1}{2} = 0.5 = \text{endlicher Dezimalbruch}$$

gilt auch

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 0.5^n = \text{endlicher Dezimalbruch für alle } n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ Behauptung. ✓ $\square$

a) Gesucht ist eine bijektive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die streng monoton fallend ist, d.h. $f(n+1) < f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie ein derartige Funktion an oder zeigen Sie, dass sie nicht existieren kann.

b) Gleiche Frage wie unter **a)**, für $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

c) $(*)$ Konstruieren Sie eine bijektive Funktion $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^k$ $(k \in \mathbb{N})$. Sie müssen die Funktion nicht explizit formelmäßig angeben; beschreiben Sie, wie die Konstruktion funktioniert.

Anmerkung zur Notation: $A^k = A \times A \times \ldots \times A = \{(a_1, \ldots, a_k)\colon\ a_i \in A\}$.)

---

a) Sei $f(1) = m \in \mathbb{N}$. Dann gilt laut Voraussetzung

$$f(2) \leq m-1, \quad f(3) \leq m-2, \quad \ldots$$

$\Rightarrow$ (Induktion)

$$f(n) \ \leq \ m-n+1 \notin \mathbb{N} \quad \text{für} \ \ n \geq m+1\,.$$

$\Rightarrow$ $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert nicht.

b) Beispiel:

$$f(n) \ = \ -n$$

c) $\mathbb{N}_0^k$ besteht aus geordneten 'k-Tupeln' der Gestalt

$$(n_1, n_2, \ldots, n_k), \quad n_j \in \mathbb{N}_0$$

Verallgemeinertes Diagonalverfahren: Betrachte alle Teilmengen

$$M_n \ := \ \{(n_1, n_2, \ldots, n_k) : \ n_1 + \ldots + n_k = n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Jede der endlichen Mengen M_n lässt sich 'durchnummerieren' (z.B. 'lexikografisch' wie im Telefonbuch), und dies ergibt eine Durchnummerierung von

$$\mathbb{N}_0^k \ = \ M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 + \ldots \quad \checkmark$$

$\square$

Ein Anwendungsproblem:

Für zwei in Serie bzw. parallel geschaltete elektrische Widerstände R_1 und R_2 ergibt sich der Gesamtwiderstand

$$R_{gesamt} = R_1 + R_2 \quad \text{(Serie)}, \qquad R_{gesamt} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad \text{(parallel)}.$$

Folgern Sie daraus, dass die analogen Formeln für n in Serie bzw. parallel geschaltete Widerstände ($n \geq 2$) wie folgt lauten:

$$R_{gesamt} = \sum_{i=1}^{n} R_i \quad \text{(Serie)}, \qquad R_{gesamt} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \quad \text{(parallel)}.$$

Vollständige Induktion $n \mapsto n+1$ (Induktionsanfang: Angabe, $n = 2$)

- Serie:

$$R_{1\ldots n+1} = R_{1\ldots n} + R_{n+1} \stackrel{IND}{=} (R_1 + \ldots + R_n) + R_{n+1} \quad \checkmark$$

- Parallel:

$$R_{1\ldots n+1} = \frac{1}{\frac{1}{R_{1\ldots n}} + \frac{1}{R_{n+1}}} \stackrel{IND}{=} \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \ldots + \frac{1}{R_n} + \frac{1}{R_{n+1}}} \quad \checkmark$$

$\square$