Zeigen Sie:

a) Das Intervall $(0,1)$ hat dieselbe Mächtigkeit wie ein beliebiges Intervall (a,b), wobei $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Hinweis: Finden Sie eine bijektive Abbildung zwischen $(0,1)$ und (a,b).

$(*)$ Lassen Sie auch $a = 0$, $b = \infty$ als Grenzfall zu. Die naheliegende Bijektion für den Fall $a,b \in \mathbb{R}$ lässt sich jedoch nicht auf diesen Grenzfall übertragen.

(Ähnlich funktioniert es für (a,∞), $(-\infty,b)$ und $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$.)

b) $(*)$ Die Potenzmenge $P(X)$ einer beliebigen nichtleeren Menge X hat dieselbe Mächtigkeit wie die Menge aller Funktionen χ des Typs $\chi : X \to \{0,1\}$.

Hinweis: Die sogenannte *charakteristische Funktion* einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist definiert durch

$$\chi_A : X \to \{0,1\}, \qquad \chi_A(x) := \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A. \end{cases}$$

c) Für eine endliche Menge X mit $n \geq 0$ Elementen gilt $|P(X)| = 2^n$.

Anmerkung: Die Mächtigkeit einer Menge A bezeichnet man mit $|A|$.

---

a) z.z.: $|(0,1)| = |(a,b)|$ für $-\infty \leq a < b \leq \infty$

(i) Sei $a,b \in \mathbb{R}$. Definiere die affine Funktion $f\colon [0,1] \to [a,b]$,

$$x \mapsto f(x) := a + (b-a)x, \quad \text{mit } f(0) = a, \quad f(1) = b$$

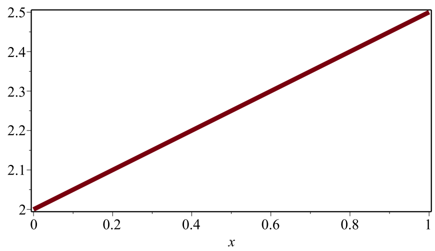
Wir zeigen, dass f bijektiv ist: Sei $y \in [a,b]$. Die Gleichung

$$(f(x) =)\ a + (b-a)x = y$$

hat die *eindeutige* Lösung

$$x = \frac{y-a}{b-a} \in [0,1]$$

$\Rightarrow$ f ist bijektiv. ✓

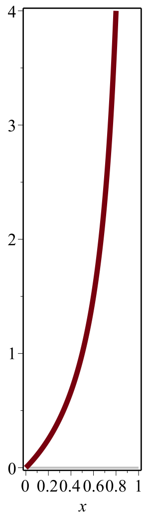


Genauso zeigt man: f als Abbildung von $(0,1)$ nach (a,b) ist bijektiv.

$\longrightarrow$

(ii) Sei $a = 0$, $b = \infty$, $(a, b) = \mathbb{R}$. Wir konstruieren eine bijektive Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und '$f(1) = +\infty$' (im Sinne des Grenzwertes):

$$x \mapsto f(x) := \frac{x}{1-x}$$



Wir zeigen, dass f bijektiv ist: Sei $y \in (0, \infty)$. Die Gleichung

$$(f(x) =)\ \frac{x}{1-x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y(1-x)$$

hat die *eindeutige* Lösung

$$x = \frac{y}{1+y} \in (0, 1)$$

$\Rightarrow$ f ist bijektiv. ✓

b) z.z.: $|P(X)| = \left|\{f : X \to \{0,1\}\}\right|$

Sei $f\colon P(X) \to \{f : X \to \{0,1\}\}$ definiert durch $A \mapsto \chi_A$ mit

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

Wir zeigen, dass f ist bijektiv ist:

- *Surjektivität:* Zu einem beliebigen $\chi\colon X \to \{0,1\}$ gilt $\chi = \chi_A$ für $A = \{x \in X : \chi(x) = 1\}$, und somit $f(A) = \chi$.
- *Injektivität:* Sei $A \neq B$. Dann $\exists\, x \in X$ mit (o.B.d.A.)

$$x \in A \ \wedge \ x \neq B$$

$\Rightarrow$

$$\chi_A(x) = 1 \ \wedge \ \chi_B(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi_A \neq \chi_B, \quad \text{d.h.} \ \ f(A) \neq f(B)$$

$\Rightarrow$ f ist bijektiv. ✓

In Worten: Zu jedem $A \subseteq X$ gibt es genau eine charakteristische Funktion χ_A und umgekehrt, und jedes χ ist eine charakteristische Funktion. $\longrightarrow$

c) z.z.: $|P(X)| = 2^n$ für $|X| = n$. Notation: $X =: X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Vollständige Induktion:

- $n = 0$: $X = X_0 = \{\}$, $P(X_0) = \{\{\}\}$, $|P(X_0)| = 1 = 2^0$.
- $n \to n+1$: Betrachte

$$X_{n+1} \;=\; \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\} \;=\; X_n \cup \{x_{n+1}\}, \quad x_{n+1} \notin X_n$$

wobei $|P(X_n)| = 2^n$ (Induktionsvoraussetzung).

Wir stellen $P(X_{n+1})$ als disjunkte Vereinigung dar:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}) \;&=\; \{A \in P(X_{n+1}) : x_{n+1} \notin A\} \;\cup\; \{B \in P(X_{n+1}) : x_{n+1} \in B\} \\ &=\; P(X_n) \;\cup\; \{B \in P(X_{n+1}) : x_{n+1} \in B\} \;=:\; P \;\cup\; Q \end{aligned}$$

Behauptung: $\exists$ Bijektion $P \leftrightarrow Q$, d.h. $\exists\, f : P \to Q$ bijektiv, definiert durch

$$f(A) \;:=\; A \cup \{x_{n+1}\}, \quad \text{mit} \quad f^{-1}(B) \;=\; B \setminus \{x_{n+1}\}$$

Begründung: Zu jedem $B \in Q$ $\exists!$ $A \in P$ mit $f(A) = A \cup \{x_{n+1}\} = B$, nämlich $A = B \setminus \{x_{n+1}\} = f^{-1}(B)$.

$\Rightarrow$ $|P| = |Q|$, und daher

$$|P(X_{n+1})| \;=\; |P| + |Q| \;=\; 2^n + 2^n \;=\; 2^{n+1} \quad \checkmark$$

Anmerkung:
Für eine disjunkte Vereinigung $P \cup Q$ schreibt man manchmal auch $P + Q$.

- Alternative Argumentation ($n > 0$) unter Verwendung von b) :

Die Menge der Funktionen des Typs $\chi : X_n \to [0, 1]$ hat die Mächtigkeit 2^n.

Beweis: elementare Kombinatorik. (Vgl.: n mal eine Münze werfen – wieviele verschiedene Konstellationen gibt es?)

Ein formal sauberer Beweis erfolgt mittels Induktion (Notation wie oben) :

- $n = 1$: Es gibt 2 Funktionen $\chi : \{x_1\} \to \{0, 1\}$: $\chi(x_1) = 0$ oder $\chi(x_1) = 1$.
- $n \to n+1$: Annahme: $\exists$ 2^n verschiedene Funktionen $\chi : X_n \to \{0, 1\}$ (Induktionsvoraussetzung). Jede dieser Funktionen χ lässt sich auf 2 Arten auf X_{n+1} fortsetzen, gemäß

$$\chi(x_{n+1}) \;:=\; 0 \quad \text{oder} \quad \chi(x_{n+1}) \;:=\; 1\,.$$

$\Rightarrow$ $\exists$ 2^{n+1} verschiedene Funktionen $\chi : X_{n+1} \to \{0, 1\}$. $\checkmark$ $\square$

Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich und den Bildbereich der folgenden Funktionen, so dass diese wohldefiniert und bijektiv sind:

a) $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto x^2$

b) $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto x^2\,|x|$

c) $f\colon D \subseteq \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\quad x \mapsto 5\,x - 4$

d) $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{3+2\,x}{1-x}$

---

a) $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto x^2$

f ist wohldefinert auf ganz $\mathbb{R}$.

Bijektivität: f bijektiv als Abbildung $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$
oder als Abbildung $f\colon (-\infty, 0] \to [0,\infty)$

b) $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto x^2\,|x|$: Gleiche Antwort wie unter a).

c) $f\colon D \subseteq \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\quad x \mapsto 5\,x - 4$

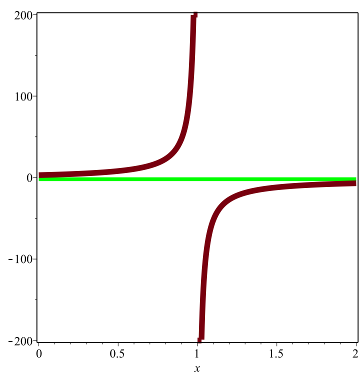
f ist wohldefinert auf $D = \mathbb{N}$.

Bijektivität: f bijektiv als Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$,

wobei $f(\mathbb{N}) \;=\; \{5\,x - 4 : x \in \mathbb{N}\} \;=\; 5\,\mathbb{N} - 4 \;=\; \{1, 6, 11, 16, 21, \ldots\}$

d) $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto \dfrac{3+2\,x}{1-x}$

f ist wohldefiniert auf $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.



Bijektivität:
Die Gleichung $f(x) = y$ hat die eindeutige Lösung $x = \underbrace{\dfrac{y-3}{y+2}}_{f^{-1}(y)}$ falls $y \neq -2$.

$\Rightarrow \quad f$ bijektiv als Abbildung $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Anmerkung:
Ist $f\colon A \to B$ bijektiv, dann ist auch f, aufgefasst als Abbildung $f\colon D \to f(D)$, bijektiv für jedes $D \subseteq A$. $\square$

Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \sqrt{2-x^2}$ und $g(x) = \frac{1}{1-x}$.

a) Bestimmen Sie die maximalen reellen Definitionsbereiche von f und g.

b) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ zusammen mit ihren maximalen reellen Definitionsbereichen.

c) Bestimmen Sie die Abbildungen $f \circ f,\ \ f \circ f \circ f, \ldots, g \circ g,\ g \circ g \circ g, \ldots$. Was fällt Ihnen auf?

---

a) $D_f \;=\; [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]\,, \qquad D_g \;=\; \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $$(f \circ g)(x) \;=\; f(g(x)) = f\Big(\frac{1}{1-x}\Big) \;=\; \sqrt{2 - \frac{1}{(1-x)^2}}$$

$$D_{f \circ g} \;=\; \mathbb{R} \setminus \big(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\big)$$

$$(g \circ f)(x) \;=\; g(f(x)) = g(\sqrt{2-x^2}) \;=\; \frac{1}{1-\sqrt{2-x^2}}$$

$$D_{g \circ f} \;=\; [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \setminus \{-1, +1\}$$

c) $$(f \circ f)(x) \;=\; f(f(x)) = f(\sqrt{2-x^2}) \;=\; \sqrt{2-(2-x^2)} = |x|$$

$$(f \circ f \circ f)(x) \;=\; f(f(f(x))) \;=\; f(|x|) = \sqrt{2-x^2} \;=\; f(x)\,, \;\; \ldots$$

$$(g \circ g)(x) \;=\; g(g(x)) \;=\; g\Big(\frac{1}{1-x}\Big) \;=\; \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

$$(g \circ g \circ g)(x) \;=\; g(g(g(x))) \;=\; g\Big(\frac{x-1}{x}\Big) = x$$

$$(g \circ g \circ g \circ g)(x) \;=\; g(g(g(g(x)))) \;=\; \frac{1}{1-x} \;=\; g(x)\,, \;\; \ldots$$

Sprechweise:

f ist *idempotent* vom Grad 3: $f^3 = f$.

g ist *idempotent* vom Grad 4: $g^4 = g$.

$\square$

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung und M eine Teilmenge von Y. Mit $f^{-1}(M)$ bezeichnet man das *Urbild* von M unter der Funktion f, d.h. die Menge

$$f^{-1}(M) := \{x \in X : f(x) \in M\}.$$

Zeigen Sie:

a) f ist genau dann injektiv wenn $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ für jedes $A \subseteq X$.

b) f ist genau dann surjektiv wenn $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ für jedes $B \subseteq Y$.

Anmerkung: f ist also genau dann bijektiv, wenn

$$f^{-1}\big(f(A)\big) = A \quad \wedge \quad f\big(f^{-1}(B)\big) = B$$

für jedes $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ zutrifft.

---

a) z.z.: f ist injektiv $\Leftrightarrow$ $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ für jedes $A \subseteq X$

'$\Rightarrow$' Sei f injektiv und $A \subseteq X$ beliebig. Injektivität $\Rightarrow$ Für jedes $x \in A$:

$$f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$$

$$\Rightarrow \qquad A = \bigcup_{x \in A} \{x\} = \bigcup_{x \in A} f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(f(A))$$

'$\Leftarrow$' Indirekt: Annahme, f nicht injektiv. $\Rightarrow$ Es gibt ein $x \in X$ mit

$$f^{-1}(\{f(x)\}) \overset{\neq}{\supseteq} \{x\}$$

Somit:

$$f^{-1}(f(A)) \neq A \quad \text{für} \quad A = \{x\}\,.$$

b) z.z.: f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ für jedes $B \subseteq Y$

'$\Rightarrow$' Sei f surjektiv und $B \subseteq Y$ beliebig. Surjektivität $\Rightarrow$ Für jedes $y \in B$ ist $f^{-1}(\{y\})$ nichtleer, und

$$f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$$

$$\Rightarrow \qquad B = \bigcup_{y \in B} \{y\} = \bigcup_{y \in B} f(f^{-1}(\{y\})) = f(f^{-1}(B))$$

'$\Leftarrow$' Indirekt: Annahme, f nicht surjektiv. $\Rightarrow$ Es gibt ein $y \in Y$ mit $f^{-1}(\{y\}) = \{\}$, und daher

$$f(f^{-1}(\{y\}) = \{\}$$

Somit:

$$\{\} = f(f^{-1}(B)) \neq B \quad \text{für} \quad B = \{y\}\,.$$

$\square$

Gegeben sei die Folge $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ mit $a_n = \frac{n-2}{n+1}$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - 1| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt, für

a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, **b)** $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, und

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n-2}{n+1} - 1\right| = \left| - \frac{3}{n+1}\right| < \frac{3}{n}$$

Für alle $n \geq N$ gilt $\frac{3}{n} \leq \frac{3}{N}$ $\Rightarrow$

a)

$$\frac{3}{N} \leq \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad N \geq 30$$

b)

$$\frac{3}{N} \leq \frac{1}{100} \quad \Leftrightarrow \quad N \geq 300$$

Allgemein:

$$\frac{3}{N} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad N \geq \frac{3}{\varepsilon}$$

(umgekehrt proportionaler Zusammenhang zwischen ε und N).

$\square$

Untersuchen Sie die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränktheit. Berechnen Sie auch die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} x_n$, falls sie existieren.

a) $x_n = \dfrac{1-n+n^2}{n+1}$ **b)** $(*)$ $x_n = \dfrac{1-n+n^2}{n(n+1)}$

c) $x_n = \dfrac{1}{1+(-2)^n}$ **d)** $(*)$ $x_n = \sqrt{1+\dfrac{n+1}{n}}$

---

a) Vereinfachung durch Umformen: [a]

$$x_n = \frac{n^2+n-2n-2+3}{n+1} = \frac{n(n+1)-2(n+1)+3}{n+1} = n-2+\frac{3}{n+1}$$

$\Rightarrow$ $\{x_n\}$ offensichtlich unbeschränkt, somit divergent.

Monotonie:

$$x_{n+1}-x_n = n-1+\frac{3}{n+2}-n+2-\frac{3}{n+1} = 1-\frac{3}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

$\{x_n\}$ strikt monoton wachsend.

b) Vereinfachung durch Umformen:

$$x_n = \frac{n^2+n-2n+1}{n(n+1)} = \frac{n(n+1)-2n+1}{n(n+1)} = 1-\underbrace{\frac{2n-1}{n(n+1)}}_{=:\,y_n}$$

$\Rightarrow$ $\{x_n\}$ offensichtlich positiv und beschränkt.

Monotonie: Für $y_n = \dfrac{2n-1}{n(n+1)} > 0$ gilt

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\dfrac{2n-1}{n(n+1)}}{\dfrac{2n+1}{(n+1)(n+2)}} = \frac{(2n-1)(n+2)}{(2n+1)n} = \frac{2n^2+3n-2}{2n^2+n} > 1$$

$\Rightarrow$ $\{y_n\}$ strikt monoton fallend $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ strikt monoton wachsend.

Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\underbrace{\frac{2n-1}{n(n+1)}}_{\to 0}\right) = 1$$

Anmerkung: Um 1 als Grenzwert zu erkennen, hätte man die Monotonie und Beschränktheit nicht benötigt, weil offensichtlich $y_n \to 0$ gilt. $\longrightarrow$

[a] Dies entspricht einer Division durch $n+1$ mit Rest, siehe Kapitel 7.

c) $\{x_n\} = \dfrac{1}{1+(-2)^n}$ offensichtlich beschränkt: $|x_n| \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Folge oszilliert:

$$x_{2k} = \frac{1}{1+(-2)^{2k}} = \frac{1}{1+2^{2k}} > 0 \quad \text{und} \quad x_{2k+1} = \frac{1}{1+(-2)^{2k+1}} < 0$$

Also ist $\{x_n\}$ nicht monoton.

Da $x_{2k} \to 0$ und $x_{2k+1} \to 0$, konvergiert auch x_n gegen 0.

d) $\{x_n\} = \sqrt{2+\dfrac{1}{n}}$ positiv und monoton fallend, somit konvergent.

Mit $2+\dfrac{1}{n} \to 2$ und der *Stetigkeit (!)* von $\sqrt{\cdot}$ (siehe Aufgabe 8a9) folgt

$$x_n \to \sqrt{2}$$

Ein direkter 'ε-$N(\varepsilon)$-Beweis' funktioniert ähnlich wie der Nachweis der Stetigkeit von $\sqrt{\cdot}$ (Aufgabe 8a)).

$\square$

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) *Eine Folge konvergiert, falls sie monoton und beschränkt ist.*

b) *Eine konvergente Folge ist monoton und beschränkt.*

c) *Wenn eine Folge nicht monoton ist, konvergiert sie nicht.*

d) *Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, konvergiert sie nicht.*

e) Für eine durch ein rekursives Gesetz der Form $a_n := f(a_{n-1})$ (mit vorgegebenem 'Startwert' a_1) definierte Folge bezeichnet man die Gleichung $a = f(a)$ als die zugehörige Fixpunktgleichung. (Dabei ist f eine gegebene Funktion.)

(∗∗) Behauptung: *Wenn es Lösungen a zur Fixpunktgleichung einer rekursiv definierten konvergenten Folge gibt, so konvergiert die Folge gegen einen dieser Werte a.*

Welche Eigenschaft muss für f an einer derartigen Stelle a gelten, damit die Aussage richtig ist? Kommt Ihnen diese Eigenschaft bekannt vor?

---

a) Richtig. (Siehe Satz 4.7)

b) Falsch. Gegenbeispiel: $\{\frac{(-1)^n}{n}\} \to 0$.

c) Falsch. Gegenbeispiel: $\{\frac{(-1)^n}{n}\} \to 0$.

d) Richtig. (Siehe Satz 4.2)

e) Im Allgemeinen falsch. Aufgrund der Konvergenz gilt

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

Damit $a = f(a)$ richtig ist, müsste daher gelten

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$$

Dies bedeutet: f muss an der Stelle a **stetig** sein (siehe Kapitel 6).

Die Aussage ist richtig, falls f stetig an a.

□

a) $(*)$ Beweisen Sie: Die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}, \quad n \geq 1,$$

ist konvergent. Bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Folge monoton wachsend und durch $c = 2$ beschränkt ist, und nehmen Sie dann Bezug auf die Lösung von Aufgabe 7e).

b) Sei $m \in \mathbb{N}$ fest und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$b_n := \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} a_{n+k}$$

Zeigen Sie: $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a.

---

a) • Die Folge a_n ist (strikt) monoton wachsend. Beweis mittels vollständiger Induktion:

– $1 \to 2:\ a_2 = \sqrt{2} > 1 = a_1$

– $n \to n+1:$

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \overset{IND}{>} \sqrt{1+a_{n-1}} = a_n$$

• Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| < 2$. Beweis indirekt:

Annahme: $\exists\ n > 2$ mit $a_n \geq 2$. Wähle das kleinste $n > 2$ mit dieser Eigenschaft. $\Rightarrow$

$$a_n = \sqrt{1+a_{n-1}} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad a_{n-1} \geq 3 \quad \to \quad \text{Widerspruch}$$

Monotonie + Beschränktheit $\Rightarrow$ $\exists$ (eindeutiger) Grenzwert a.

• Die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ ist stetig an jeder Stelle $x > 0$ (vgl. 7e)):

Sei $\{x_n\}$ eine Folge mit $x_n \to x > 0$. Für $\varepsilon > 0$ (hinreichend klein) existiert $N = N(\varepsilon)$ mit $x_n > 0$ und $|x_n - x| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ $\Rightarrow$

$$|f(x_n) - f(x)| = |\sqrt{1+x_n} - \sqrt{1+x}| = \left|\frac{(1+x_n)-(1+x)}{\sqrt{1+x_n}+\sqrt{1+x}}\right|$$
$$\leq \frac{|x_n - x|}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon)$$

$\Rightarrow$ $f(x_n) \to f(x)$ (Stetigkeit).

• 7e) $\Rightarrow$ Grenzwert a ist (positive) Lösung der Fixpunktgleichung

$$a = f(a) = \sqrt{1+a} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\longrightarrow$

Anmerkung zu a):

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ als Grenzwert der rekursiv definierten Folge } \{a_n\}$$

$\rightsquigarrow$ Deutung als Grenzwert einer Folge von 'Kettenwurzeln' a_n, z.B.

$$a_{10} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}}}}}}$$

b) Verwende Rechenregeln für konvergente Folgen.

Für $a_n \to a$ gilt auch

$$a_{n+k} \to a \quad \text{für alle } \; k \in \mathbb{N}$$

Daher:

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{n+k} \to m\,a$$

als Limes einer endlichen Summe konvergenter Folgen. $\Rightarrow$

$$b_n = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} a_{n+k} \to a \qquad \checkmark$$

$\square$

Seien $a, b, p > 0$ positive reelle Zahlen. Der *Mittelwert vom Grad* p von a und b ist definiert als

$$S_p(a,b) := \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = S_p(b,a).$$

Für $p = 1$ erhalten wir insbesondere das arithmetische Mittel von a und b, für $p = 2$ das sogenannte quadratische Mittel.

a) Zeigen Sie

$$S_p(a,b) \in (a,b) \quad \text{für} \quad a < b.$$

b) $(**)$ Bestimmen Sie den Grenzwert

$$S_\infty(a,b) := \lim_{p\to\infty} S_p(a,b)$$

---

a) Für $a < b$ gilt

$$a = \left(\frac{2\,a^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{2\,b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = b \qquad \checkmark$$

b) Für $a < b$ gilt, mit $\rho := \frac{a}{b} < 1$:

$$S(p) := S_p(a,b) = \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{b^p\left((\frac{a}{b})^p + 1\right)}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = b\left(\frac{1+\rho^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = ??$$

Anmerkung: $S_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} S(p)$ für $p \in \mathbb{R}$ bedeutet dasselbe wie

$$\lim_{p_n\to\infty} S(p) = S_\infty \quad \text{für jede Folge } \{p_n\} \to \infty,$$

oder dazu äquivalent:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, P > 0 : \;\; |S(p) - S_\infty| < \varepsilon \;\; \forall\, p \geq P$$

D.h., die Funktion $S(p)$ ‘strebt für $p \to \infty$ gegen einen endlichen Wert.’

- Wegen $\rho^p < 1$ gilt

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{1+\rho^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} < 1$$

wobei $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \to 1$ für $p \to \infty$ (siehe VO).

Einschließungsprinzip $\Rightarrow$

$$S_\infty(a,b) = \lim_{p\to\infty} S_p(a,b) = b, \quad \text{allgemein:} \quad S_\infty(a,b) = \max\{a,b\} \qquad \square$$

Zeigen Sie

$$\frac{1+2^3+\cdots+n^3}{n^4} \to \frac{1}{4}$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die (etwas kurios anmutende) Identität

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 .$$

Vollständige Induktion:

- $n = 0: \; 1 = 1$
- $n \to n+1:$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&\overset{IND}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n + 1\right) \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^4} &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2}{n^4} = \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{n^4} = \frac{1}{4}\left(\frac{n^4 + 2\,n^3 + n^2}{n^4}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \to \frac{1}{4} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$\square$