Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ besitzt in $[a,b]$ mindestens einen *Fixpunkt* $x^* \in [a,b]$, d.h. $x^* \in [a,b]$ mit der Eigenschaft $x^* = f(x^*)$.

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g(x) = x - f(x)$ an.

b) f sei sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h. f ist eine sogenannte *Kontraktion*. Zeigen Sie: Der Fixpunkt x^* ist eindeutig. Geben Sie auch ein konkretes Beispiel an.

c) Man kann x^* iterativ approximieren: Ausgehend von einem Startwert $x_0 \in [a,b]$ berechnet man

$$x_{i+1} := f(x_i), \quad i = 0,1,2,\ldots$$

Diese *Fixpunktiteration* erzeugt eine Folge $\{x_i\}$. Zeigen Sie, dass diese gegen den Fixpunkt x^* konvergiert. Geben Sie auch eine Fehlerabschätzung der Form

$$|x_i - x^*| \leq C_i\,|x_0 - x^*| \tag{1}$$

an. Wie hängen die C_i von der Kontraktionsrate $L \in [0,1)$ ab?

d) (1) ist eine sogenannte *a priori - Fehlerabschätzung.* Sie sagt die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration in Abhängigkeit von L vorher. Eine numerisch auswertbare, sogenannte *a posteriori - Fehlerabschätzung* erhält man daraus mittels $|x_0 - x^*| \leq b - a$, sofern man die Kontraktionsrate L kennt. (Dies kann dazu benützt werden, die Iteration zu steuern, d.h., abzubrechen, sobald das gewünschte Genauigkeitsniveau erreicht ist.)

($*$) Letztere Abschätzung ist zu pessimistisch, falls x_0 schon nahe an x^* liegt. Zeigen Sie, dass folgende verbesserte a-posteriori - Abschätzung gilt:

$$|x_i - x^*| \leq \frac{L^i}{1-L}\,|x_1 - x_0|\,. \tag{2}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$|x_i - x^*| \leq \frac{L}{1-L}\,|x_i - x_{i-1}|\,.$$

---

a) Falls $a = f(a)$ oder $b = f(b)$, besitzt f einen Fixpunkt a oder b.

Also: Annahme

$$a \neq f(a) \quad \text{und} \quad b \neq f(b)\,.$$

Wegen $f([a,b]) \subseteq [a,b]$ gilt $f(a) > a$ und $f(b) < b$.

Die Funktion

$$g(x) \;:=\; x - f(x)$$

ist auf $[a,b]$ stetig, da f stetig ist, und es gilt

$$g(a) = a - f(a) < 0, \quad \text{sowie} \quad g(b) = b - f(b) > 0\,.$$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ g besitzt mindestens eine Nullstelle $x^* \in (a,b)$.

Es gilt $x^* = f(x^*)$: x^* ist Fixpunkt von f. ✓ $\longrightarrow$

b) Für zwei Fixpunkte x^* und y^* von f gilt mit $L < 1$:

$$|x^* - y^*| \;=\; |f(x^*) - f(y^*)| \;\leq\; L\,|x^* - y^*| \qquad \Rightarrow \qquad x^* = y^*$$

Es gibt genau einen Fixpunkt.

Beispiel: Siehe Aufgabe 2.

c) Konvergenz der Fixpunktiteration: Es gilt

$$|x_i - x^*| \;=\; |f(x_{i-1}) - f(x^*)| \;\leq\; L\,|x_{i-1} - x^*|\,,$$

und daraus (Induktion)

$$|x_i - x^*| \;\leq\; L^i\,|x_0 - x^*| \;\leq\; L^i\,(b-a)\,.$$

Aus $L^i \to 0$ für $i \to \infty$ folgt $|x_i - x^*| \to 0$, somit $x^i \to x^*$. ✓

d) Verwende Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |x_i - x^*| \;&\leq\; L\,|x_{i-1} - x^*| \\ &\leq\; L\,|(x_{i-1} - x_i) + (x_i - x^*)| \\ &\leq\; L\,|x_{i-1} - x_i| + L\,|x_i - x^*| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad |x_i - x^*| \leq \frac{L}{1-L}\,|x_i - x_{i-1}|$$

Daraus mit Hilfe von c):

$$\begin{aligned} |x_i - x^*| \;&\leq\; L^{i-1}\,|x_1 - x^*| \\ &\leq\; L^{i-1}\,\frac{L}{1-L}\,|x_1 - x_0| \\ &=\; \frac{L^i}{1-L}\,|x_1 - x_0|\,. \end{aligned}$$ ✓

□

Fortsetzung von Aufgabe 1:
Gesucht ist eine Lösung $x = x^* \in [0,1]$ der Gleichung $x^3 + 4\,x - 1 = 0$. Dies ist äquivalent zur Lösung der Fixpunktgleichung

$$x = f(x), \quad f\colon\ [0,1] \to [0,1]: \quad f(x) = \frac{1-x^3}{4}\,.$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon\ [0,1] \to [0,1]$ ist eine Kontraktion.

b) Führen Sie einige Schritte der Fixpunktiteration am Rechner aus, z.B. ausgehend von $x_0 := \frac{1}{2}$, und vergleichen Sie die echten Fehler $x_i - x^*$ mit der Abschätzung (2).

Anmerkung: Die exakte Lösung ist $x^* = \frac{c}{6} - \frac{8}{c}$ mit $c = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{849}}$; $x^* \approx 0.246266\ldots$

---

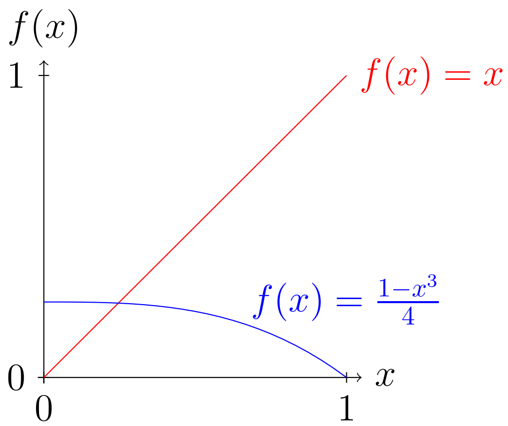
a) Es gilt $f[0,1] \subseteq [0,1]$, da $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 0$, und f monoton fallend.

Lipschitzkonstante von f: Für $x \in [0,1]$ ist

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \tfrac{1}{4}\,|x_1^3 - y_1^3| = \tfrac{1}{4}\,|x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2|\,|x_1 - x_2| \le \underbrace{\tfrac{3}{4}}_{L\,<\,1}\,|x_1 - x_2|$$

b) Fixpunktiteration ausgehend von $x_0 = 0.5$:

i	x[i] := f(x[i-1])
1	0.218750000000000
2	0.247383117675781
3	0.246215136825392
4	0.246268493043046
5	0.246266066601086
	......



i	|x[i]-xstar|	L^i/(1-L)|x[1]-x[0]|
1	0.027516172167723	0.84375
2	0.001116945508059	0.6328125
3	0.000051035342331	0.474609375
4	0.000002320875323	0.35595703125
5	0.000000105566637	0.2669677734375
	......	

Erklärung: Die Fehlerabschätzung ist zu pessimistisch. In der Nähe von x^* ist f lokal Lipschitzstetig mit kleinerem L. Z.B. gilt für $f\colon\ \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right] \to \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$:

$$L \;\le\; \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) \;=\; \tfrac{3}{16}\,.$$

$\square$

Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + a}{(x-1)^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + 8}{x^2 - 4}$

---

a) Nullstellen des Zählers $x^2 + 2x + a$:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$$

Für $a = -3$ ist $x_1 = 1$ (Nullstelle des Nenners), und $x_2 = -3$.

- 'Generischer' Fall $a \neq -3$: Pol 2. Ordnung an $x = 1$.
- Sonderfall: $a = -3$ $\rightsquigarrow$ Pol 1. Ordnung an $x = 1$:

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-x_1)}(x-x_2)}{\cancel{(x-1)}(x-1)} = \frac{x+3}{x-1}$$

b) Nullstellen des Zählers $x^2 + ax + 8$:

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 32}$$

Für $a = -6$ ist $x_2 = 2$ (erste Nullstelle des Nenners), und $x_1 = 4$.

Für $a = 6$ ist $x_1 = -2$ (zweite Nullstelle des Nenners), und $x_2 = -4$.

- 'Generischer' Fall $a \neq -6,\, 6$: Je ein Pol 1. Ordnung an $x = -2,\, 2$.
- Sonderfall (i): $a = -6$ $\rightsquigarrow$ Pol 1. Ordnung nur an $x = -2$:

$$f(x) = \frac{(x-x_1)\cancel{(x-x_2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \frac{x-4}{x+2}$$

- Sonderfall (ii): $a = 6$ $\rightsquigarrow$ Pol 1. Ordnung nur an $x = 2$:

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-x_1)}(x-x_2)}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \frac{x+4}{x-2}$$

□

a) Sei $f\colon I \to J$ eine auf einem Intervall I definierte stetige und bijektive Funktion (das Bild $J = f(I)$ ist auch ein Intervall). Geben Sie eine Bedingung an f an, so dass $f^{-1}\colon J \to I$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitzkonstante K. (Stellen Sie sich das Ganze auch anschaulich anhand einer Skizze vor.)

b) Seien f und g zwei Lipschitz-stetige Funktionen. Bestimmen Sie je eine Lipschitzkonstante für $f \circ g$ und $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ mal}}$.

c) Seien f und g zwei beschränkte Lipschitz-stetige Funktionen. Bestimmen Sie eine Lipschitzkonstante für die Produktfunktion $f \cdot g$.

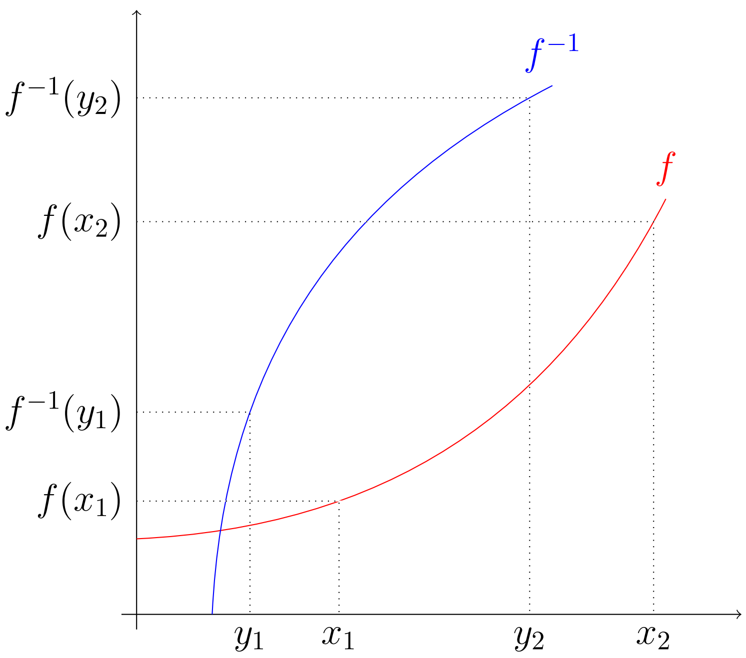
---

a) Lipschitz-Stetigkeit von f^{-1} bedeutet

$$|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \;\le\; K\,|y_1 - y_2| \quad \text{für alle } \; y_1, y_2 \in J\,.$$

Mit $y_i = f(x_i),\; x_i = f^{-1}(y_i)$ ist dies äquivalent zu

$$|f(x_1) - f(x_2)| \;\ge\; \tfrac{1}{K}\,|x_1 - x_2| \quad \text{für alle } \; x_1, x_2 \in I\,.$$



b) Seien $L_f, L_g \ge 0$ die Lipschitzkonstanten von f und g. $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}|(f\circ g)(x_1) - (f\circ g)(x_2)| \;&=\; |f(g(x_1)) - f(g(x_2))|\\ &\le\; L_f\,|g(x_1) - g(x_2)| \;\le\; L_f \cdot L_g\,|x_1 - x_2|\end{aligned}$$

$f \circ g$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L_{f\circ g} = L_f \cdot L_g$.

Für $f^n = f \circ \cdots \circ f$ gilt

$$|f^n(x_1) - f^n(x_2)| \;\le\; L_f \cdot |f^{n-1}(x_1) - f^{n-1}(x_2)| \;\le\; \cdots \;\le\; L_f^n \cdot |x_1 - x_2|$$

f^n ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L_{f^n} = L_f^n$.

$\longrightarrow$

c) Seien $L_f,\ L_g \geq 0$ die Lipschitzkonstanten von f und g. $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
&|f(x_1)\,g(x_1) - f(x_2)\,g(x_2)| \\
&\quad = |f(x_1)\,g(x_1) - f(x_1)\,g(x_2) + f(x_1)\,g(x_2) - f(x_2)\,g(x_2)| \\
&\quad \leq |f(x_1)\,(g(x_1) - g(x_2))| + |(f(x_1) - f(x_2))\,g(x_2)| \\
&\quad \leq |f(x_1)| \cdot |g(x_1) - g(x_2)| + |f(x_1) - f(x_2)| \cdot |g(x_2)| \\
&\quad \leq |f(x_1)| \cdot L_g + L_f \cdot |g(x_2)| \\
&\quad \leq \sup_{x \in D_f} |f(x)| \cdot L_g + L_f \cdot \sup_{x \in D_g} |g(x)| \;=\; L_{f \cdot g}\,.
\end{aligned}$$

Anmerkung:

- D_f beschränkt $\quad\Rightarrow\quad$ für festes $x_0 \in D_f$ und beliebiges $x \in D_f$:
$$|f(x)| \;\leq\; |f(x_0)| + L_f\,|x - x_0| \qquad\Rightarrow\qquad f \text{ beschränkt.}$$
- Falls D_f unbeschränkt, folgt die Beschränktheit von f nicht aus seiner Lipschitz-Stetigkeit. Beispiel: $f(x) = x,\ D_f = \mathbb{R}\,.$

$\square$

a) Zeigen Sie, dass
$$f(x) = \frac{x^n - c^n}{x - c}$$
sich an $x = c$ stetig fortsetzen lässt, und berechen Sie den Wert der stetigen Fortsetzung dieser Stelle.

b) Zeigen Sie, dass
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \ .$$
sich an $x = 0$ stetig fortsetzen lässt, und berechen Sie den Wert der stetigen Fortsetzung dieser Stelle. Geben Sie auch die Umkehrfunktion von $f\colon\ [0,1] \to f([0,1])$ an und machen Sie eine Skizze.

c) Sei f Lipschitz-stetig. Kann man zeigen, dass dann die Funktion
$$g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$
an $x = c$ stetig fortsetzbar ist? (Versuchen Sie es.) Welchen Wert hat die stetige Fortsetzung an $x = c$ (falls sie existiert)?

---

a) Verwende Lemma 1.2 :
$$x^n - c^n \ = \ (x - c)(x^{n-1} + c\,x^{n-2} + c^2\,x^{n-3} + \cdots + c^{n-2}\,x + c^{n-1})$$
$$\Rightarrow$$
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \, (x^{n-1} + c\,x^{n-2} + c^2\,x^{n-3} + \cdots + c^{n-2}\,x + c^{n-1}) \ = \ n\,c^{n-1} \ .$$

b) Umformen:
$$\begin{aligned} f(x) \ &= \ \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \ = \ \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x\,(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \ \frac{(1+x) - 1}{x\,(\sqrt{1+x} + 1)} \ = \ \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \end{aligned}$$
$$\Rightarrow$$
$$\lim_{x \to 0} f(x) \ = \ \frac{1}{2} \ .$$

Injektivität:

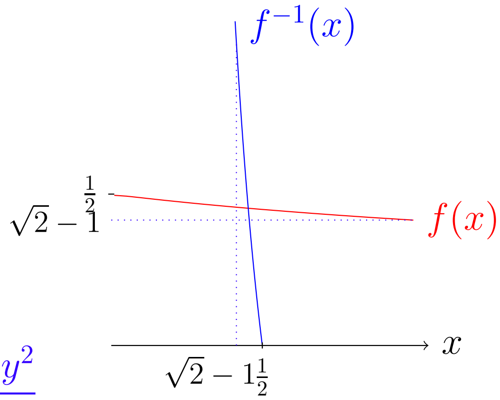
f ist auf $[0,1]$ strikt monoton fallend, mit $f(0) = \frac{1}{2}$ und $f(1) = \sqrt{2} - 1$.

$\Rightarrow$ f bijektiv als Abbildung $f\colon\ [0,1] \to [\sqrt{2} - 1, \frac{1}{2}]$.

$\longrightarrow$

a) *Bestimmung der Umkehrfunktion.* Auflösen der Gleichung $f(x) = y$ nach x :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} &= y \\
y\left(\sqrt{1+x}+1\right) &= 1 \\
y\sqrt{1+x} &= 1-y \\
\sqrt{1+x} &= \frac{1-y}{y} \\
1+x &= \left(\frac{1-y}{y}\right)^2 = \frac{1-2\,y+y^2}{y^2} \\
x &= \frac{1-2\,y}{y^2} = f^{-1}(y)
\end{aligned}
$$



c) Betrachte eine Folge $\{x_n\} \to c$ mit $\{f(x_n)\} \to f(c)$. Dann ist

$$\{g(x_n)\} = \left\{\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}\right\}$$

beschränkt durch L: $|g(x_n)| \le L$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beschränkte Folgen enthalten konvergente Teilfolgen, müssen aber selbst nicht notwendigerweise konvergieren.

Die Existenz des Limes

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} =: f'(c)$$

bedeutet **Differenzierbarkeit** von f an der Stelle c. Differenzierbarkeit ist eine ‘stärkere’ Eigenschaft als Lipschitz-Stetigkeit.

$\square$

Die Funktion $\mathrm{Li}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$ nennt man den *Polylogarithmus* vom Grad k. (Für $k = 1$ erhält man den gewöhnlichen natürlichen Logarithmus $\ln x$.)

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Li}_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ (der Trilogarithmus) auf $[0,1]$ wohldefiniert und Lipschitz-stetig ist. Bestimmen Sie die Lipschitzkonstante L.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Li}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (der Dilogarithmus) auf $[0,1]$ wohldefiniert ist und für beliebige $\varepsilon \in (0,1)$ auf $[0, 1-\varepsilon]$ Lipschitz-stetig ist. Bestimmen Sie die Lipschitzkonstante $L = L(\varepsilon)$.

Zusatzfrage: Was meinen Sie: Wie verhält sich $\mathrm{Li}_2(x)$ in der Nähe der Stelle $x = 1$ (mit $\mathrm{Li}_2(1) = \pi^2/6$)?

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Folge von Lipschitzkonstanten $L = L_n$ für die Funktionen $x^n \colon [0,1] \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

---

a) *Wohldefiniertheit auf* $[0,1]$:

$$\mathrm{Li}_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ist konvergente Majorante für alle $x \in [0,1]$.

Lipschitz-Stetigkeit auf $[0,1]$: Verwende Lemma 1.2,

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{Li}_3(x_1) - \mathrm{Li}_3(x_2)\,| &= \left|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_1^n}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_2^n}{n^3} \,\right| \\
&= \left|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_1^n - x_2^n}{n^3} \,\right| \\
&= \left|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_1 - x_2) \sum_{i=0}^{n-1} x_1^i \, x_2^{n-1-i}}{n^3} \,\right| \\
&\le |x_1 - x_2| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} 1}{n^3} \\
&= |x_1 - x_2| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \,.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Li}_3(x)$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$\longrightarrow$

b) *Wohldefiniertheit auf* $[0,1]$:

$$\mathrm{Li}_2(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;<\; \infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergente Majorante für alle $x \in [0,1]$.

Lipschitz-Stetigkeit auf $[0, 1-\varepsilon]$: Verwende Lemma 1.2,

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Li}_2(x_1) - \mathrm{Li}_2(x_2)| \;&=\; \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_1^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_2^n}{n^2} \Big| \\
&=\; \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_1^n - x_2^n}{n^2} \Big| \\
&=\; \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_1 - x_2) \sum_{i=0}^{n-1} x_1^i \, x_2^{n-1-i}}{n^2} \Big| \\
&\le\; \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_1 - x_2)\, n\, (1-\varepsilon)^{n-1}}{n^2} \Big| \\
&\le\; |x_1 - x_2| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon)^{n-1}}{n} \\
&\le\; |x_1 - x_2| \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^n \\
&\overset{\text{geom. Reihe}}{=}\; |x_1 - x_2| \, \frac{1}{\varepsilon} \, .
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Li}_2(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $[0, 1-\varepsilon]$ mit Lipschitzkonstante $L = \frac{1}{\varepsilon}$.

$\longrightarrow$

Zusatzfrage:

Die Funktionen $x^n\colon\ [0,1]\to[0,1],\ n\in\mathbb{N}$, sind Lipschitz-stetig mit Lipschitz-konstante $L_n = n$,

$$|x_1^n - x_2^n| \;=\; |(x_1-x_2)\sum_{i=0}^{n-1} x_1^i\, x_2^{n-i-1}| \;\le\; n\,|x_1-x_2|\,,$$

und daraus für $x_1,\, x_2\in[0,1]$,

$$|\mathrm{Li}_2(x_1)-\mathrm{Li}_2(x_2)| \;\le\; |(x_1-x_2)|\,\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2}}_{=\,\infty}\,.$$

Die Abschätzung nach oben funktioniert nicht, was ‘unendliche Steigung’ an der Stelle $x=1$ vermuten lässt.

Wir wählen jetzt $x_1=1,\ x_2=1-\varepsilon$ mit $\varepsilon\in(0,1)$ und schätzen nach unten ab. Zunächst:

$$(\,0\;<\,)\ \mathrm{Li}_2(x_1)-\mathrm{Li}_2(x_2) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n-(1-\varepsilon)^n}{n^2}$$

$$=\;\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\frac{1-(1-\varepsilon)^n}{1-(1-\varepsilon)} \;=\; \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(1-\varepsilon)^k\,.$$

Mit der elementaren Ungleichung $1-\varepsilon\ge\frac{1}{1+2\,\varepsilon}$ für $0\le\varepsilon\le\frac12$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-\varepsilon)^k \;\ge\; \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+2\,\varepsilon}\right)^k$$

$$=\;\frac{1-\left(\frac{1}{1+2\,\varepsilon}\right)^n}{1-\frac{1}{1+2\,\varepsilon}} \;=\; \frac{1-\left(\frac{1}{1+2\,\varepsilon}\right)^n}{\frac{2\,\varepsilon}{1+2\,\varepsilon}} \;\ge\; \frac{1}{2\,\varepsilon}\left(1-\left(\frac{1}{1+2\,\varepsilon}\right)^n\right)$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{Li}_2(x_1)-\mathrm{Li}_2(x_2) \;\ge\; \varepsilon\,\frac{1}{2\,\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1-\left(\frac{1}{1+2\,\varepsilon}\right)^n\right)$$

$$=\;(x_1-x_2)\,\frac{1}{2\,\varepsilon}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1-\left(\frac{1}{1+2\,\varepsilon}\right)^n\right)}_{\text{konvergent, }>0\text{, abh. von }\varepsilon}$$

$$\ge\;(x_1-x_2)\,\frac{1}{2\,\varepsilon}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1-\left(\frac{1}{1+1}\right)^n\right)}_{\text{konvergent, }>0\text{, ua. von }eps}\,,$$

für $0\le\varepsilon\le\frac12$. Grenzübergang $\varepsilon\to0$ zeigt:

$\mathrm{Li}_2(x)$ ist tatsächlich nicht Lipschitz-stetig auf $[0,1]$. $\square$

Wir betrachten einen senkrecht hüpfenden (punktförmigen) Ball.Die Höhe des Balles zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $y = h(t)$. Die Bewegung des Balles beschleunige sich in folgender Weise:

Start bei $y(0) = 0$.

Für $t \in (0, \frac{1}{4})$ bewegt sich der Ball vom Boden, also $y = 0$, auf Höhe $y = 1$.

Für $t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ bewegt sich der Ball wieder zurück zu $y = 0$.

Für $t \in (\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$ bewegt sich der Ball zurück zu $y = 1$.

Für $t \in (\frac{5}{8}, \frac{3}{4})$ bewegt sich der Ball wieder zu $y = 0$.

Für $t \in (\frac{3}{4}, \frac{13}{16})$ ...
usw. Jede der Teilstrecken wird mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, und diese verdoppelt sich von Schritt zu Schritt.

Skizzieren Sie die Funktion $h(t)$. Ist $h(t)$ linksseitig stetig fortsetzbar an der Stelle $t = 1$?

Der Ball folgt einer stetigen Bahnkurve und hüpft rauf und runter sukzessive in den Zeitintervallen

$$[0, \tfrac{1}{2}]\,,\ [\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}]\,, [\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}]\,,\ \ldots$$

In jedem Schritt halbiert sich die Intervalllänge. Die Endpunkte t_n dieser Zeitintervalle sind geometrische Summen $\{t_n\}$, mit

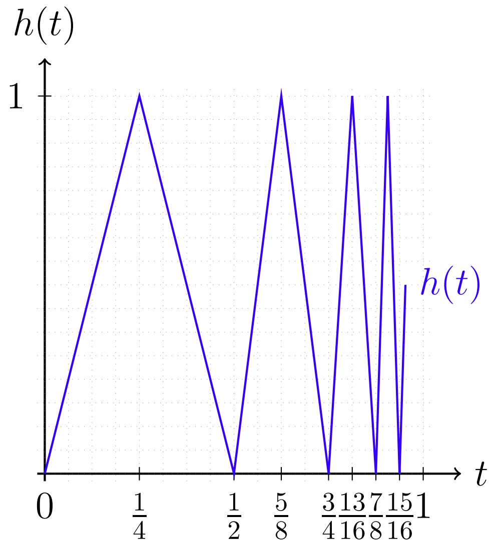
$$t_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \;\to\; 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty\,.$$

Sei $\varepsilon \in (0,1)$ beliebig [klein]. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$t_n \geq 1 - \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N\,.$$

$\Rightarrow$ Für $t > 1 - \varepsilon$ wird jeder Wert in $[0, 1]$ unendlich oft als Funktionswert angenommen. Daher existiert $\lim\limits_{t \to 1-} h(t)$ nicht.

$h(t)$ ist nicht linksseitig stetig fortsetzbar an $t = 1$.



□

Funktionen können auch *implizit* definiert sein, d.h. als Lösung einer parameterabhängigen Gleichung. Betrachten Sie die Gleichung

$$\frac{y-1}{x+1} = 1 - x\,y$$

für die Unbekannte y in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$. Durch ihre Lösung ist eine Funktion $y = f(x)$ definiert. Wie lautet diese? Ist sie wohldefiniert und stetig für alle $x \in \mathbb{R}$?

Besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = -1$. Was ist $f(-1)$?

- $x \neq -1$:

  Die gegebene Gleichung ist äquivalent zur linearen Gleichung (abhängig von x)

$$y - 1 \;=\; (x+1)(1 - x\,y) \quad\Leftrightarrow\quad (1 + x + x^2)\,y \;=\; 2 + x$$

  mit $1 + x + x^2 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\quad\Rightarrow$

$$y \;=\; f(x) \;=\; \frac{2+x}{1+x+x^2} \quad \text{wohldefiniert und stetig auf ganz } \mathbb{R}\,,$$

  offenbar auch für $x = -1$.

- $x = -1$:

  Die gegebene Gleichung ist nicht definiert, aber $f(x)$ ist trivialerweise stetig fortsetzbar an $x = -1$:

$$f(-1) \;=\; \frac{2-1}{1-1+1^2} \;=\; 1\,.$$

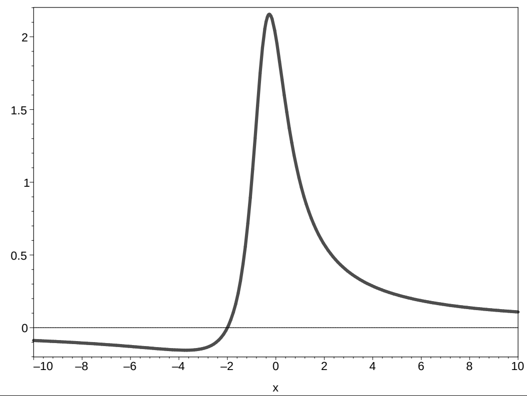
  Beachte: Für $x = -1$, $y = 1$ ist

$$\frac{y-1}{x+1} = \frac{0}{0}$$

  ein unbestimmter Ausdruck. Für $y = f(x)$ gilt jedoch

$$\frac{y-1}{x+1} \;=\; \frac{f(x)-1}{x+1} \;=\; \frac{\frac{2+x}{1+x+x^2} - 1}{x+1} \;=\; \frac{\frac{2+x-1-x-x^2}{1+x+x^2}}{1+x} \;=\; \frac{\frac{(1-x)\cancel{(1+x)}}{1+x+x^2}}{\cancel{(1+x)}}$$

  mit Wert 2 für $x = -1$.



□

Funktionen können auch in *rekursiver* Weise definiert sein. Betrachten Sie $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x\,, & x \in [0,1]\,, \\ f(\frac{x}{2})\,, & x > 1\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion wohldefiniert ist. Wo ist sie stetig, und wie lauten die Unstetigkeitsstellen und ihr Typ? Skizzieren Sie auch den Graphen von f.

- f ist wohldefiniert: Für beliebige $x > 1$ ist

$$f(x) = f(\tfrac{x}{2}) = f(\tfrac{x}{4}) = \ldots = f(\tfrac{x}{n}) = \tfrac{x}{n}\,,$$

  mit $n = n(x) =$ kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{x}{n} \le 1$.

Folgerung: für $x > 1$:
Wegen $\frac{x}{n(x)-1} > 1$ ist $f(x) = \frac{x}{n(x)} = \frac{1}{2}\frac{x}{n(x)-1} > \frac{1}{2}$ für alle $x > 1$.

- Stetigkeit von f:
  - $f(x)$ ist linksseitig stetig für alle $x > 0$.

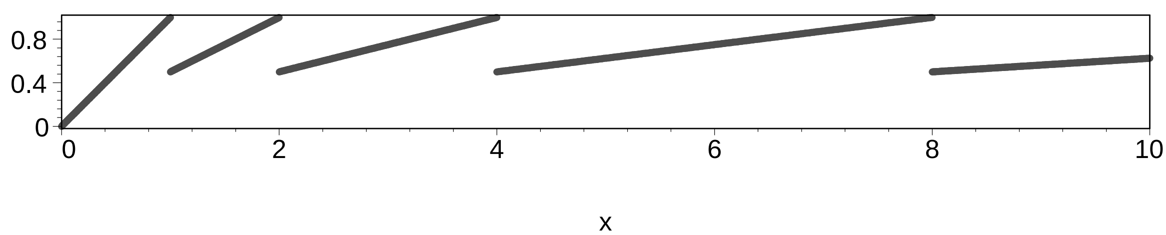
    Beweis: Für $x \in (1,2]$ ist $\lim\limits_{y\uparrow x} f(y) = \lim\limits_{y\uparrow x} \frac{y}{2} = \frac{x}{2} = f(x)$.

    Für $x > 2$ argumentiert man induktiv.
  - $f(x)$ ist rechtsseitig unstetig für alle $x = 2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

    Beweis: $f(1) = 1$, aber $\lim\limits_{y\downarrow 1} f(y) = \lim\limits_{y\downarrow 1} f(\frac{y}{2}) = \frac{1}{2}$.

    Für $x = 2, 4, 8, \ldots$ argumentiert man induktiv.

    Ähnlich zeigt man: $f(x)$ ist rechtsseitig stetig für $x \ne 1, 2, 4, 8, \ldots$



□

Finden Sie Folgen $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$, so dass

$$\delta_n(x) := \frac{a_n}{b_n + c_n\, x^2} \geq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, und

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n$ nennt man *Dirac-Funktion* oder auch Dirac'sche Delta-Distribution, und eine Folge, die gegen die Dirac-Funktion konvergiert, nennt man eine Dirac-Folge. Man beachte, dass $\delta(x)$ keine Funktion im gewöhnlichen Sinn ist.

- $x = 0:$ Es muss gelten

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty\,,$$

  d.h., a_n muss deutlich schneller wachsen als b_n.

- $x \neq 0:$ Es muss gelten

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n + c_n\, x^2} = 0\,,$$

  d.h. für alle $x \neq 0$ muss $b_n + c_n\, x^2$ deutlich schneller wachsen als a_n, also c_n deutlich schneller als a_n.

Wähle z.B.

$$a_n = n\,, \quad b_n = 1\,, \quad c_n = n^2\,,$$

$\rightsquigarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1 + n^2\, x^2} = \begin{cases} 0\,, & x \neq 0\,, \\ \infty\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

$\square$