Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren:

a) $x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - x$

b) $x^3 - x^2 - c^2\,x + c^2, \quad c \in \mathbb{R}$

Für welche Werte von c treten mehrfache Nullstellen (doppelt oder dreifach) auf?

c) $x^{10} - 5\,c\,x^8 + 10\,c^2\,x^6 - 10\,c^3\,x^4 + 5\,c^4\,x^2 - c^5, \quad c \geq 0$

Welcher Wert von c ergibt einen Sonderfall?

---

a) Offenbar ist $x = 0$ Nullstelle:

$$(x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - x)/(x - 0) \;=\; x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 1$$

Verwende 'Binomi':

$$x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - x \;=\; x\,(x-1)\,(x^2 - 2\,x + 1) \;=\; x\,(x-1)^3$$

b) Offenbar ist $x = \pm\,c$ Nullstelle.

Nun Division durch $(x-c)(x+c) = (x^2 - c^2)$:

```
    x^3 - x^2 - c^2*x + c^2  /  x^2 - c^2  =  x - 1
-   x^3       - c^2*x
  -------------------------
        - x^2         + c^2
-       - x^2         + c^2
      ---------------------
                        0
```

$\Rightarrow$

$$x^3 - x^2 - c^2\,x + c^2 \;=\; (x-1)\,(x-c)\,(x+c)$$

(Man hätte auch $x = 1$ leicht 'erraten'.)

Sonderfälle:

- $c = 0$: $x = 0$ ist doppelte Nullstelle $\rightsquigarrow$ $x^2\,(x+1)$
- $c = \pm\,1$: $x = \pm\,1$ ist doppelte Nullstelle $\rightsquigarrow$ $(x-1)^2\,(x+1)$

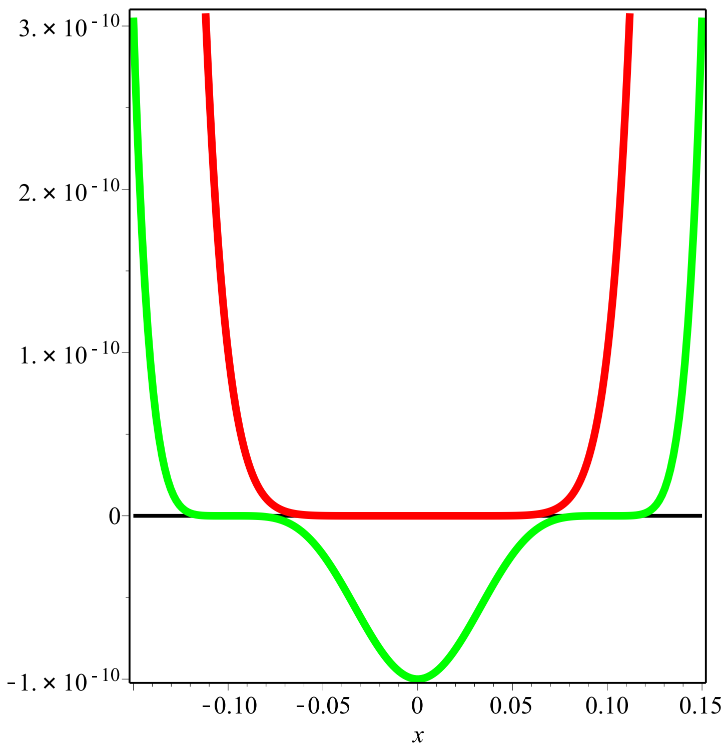
$\longrightarrow$

c) Verwende ‘Binomi’ :

$$x^{10} - 5\,c\,x^8 + 10\,c^2\,x^6 - 10\,c^3\,x^4 + 5\,c^4\,x^2 - c^5 \;=\; \left(x^2 - c\right)^5$$

- $c \neq 0$: $+\sqrt{c}$ und $-\sqrt{c}$ sind Nullstellen der Vielfachheit 5.
- Sonderfall $c = 0$: 0 ist 10 - fache Nullstelle von x^{10}.

Grafik: Lokaler Verlauf für $c = 0$ und $c = 1/100$.



□

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

a) $\dfrac{2\,x^2+4\,x+1}{x^3+2\,x^2+x}$

b) $\dfrac{1+x}{x^2-y^2}$: Zunächst PBZ bezüglich der Variablen x, wobei $y \in \mathbb{R}$ als fester Parameter angesehen wird, danach mit vertauschten Rollen.

Achten Sie auf Sonderfälle.

c) $\dfrac{x}{x^3-x^2-c^2\,x+c^2}\,,\; c \in \mathbb{R}:$

Berücksichtigen Sie Sonderfälle (spezielle Werte von c).

---

a) Faktorisierung des Nenners:

$$x^3+2\,x^2+x \;=\; x\,(x^2+2\,x+1) \;=\; x\,(x+1)^2$$

mit einfacher Nullstelle $x_1 = 0$ und doppelter Nullstelle $x_2 = -1$.

Ansatz für die PBZ:

$$\frac{2\,x^2+4\,x+1}{x\,(x+1)^2} \;=\; \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$\Longrightarrow$

$$2\,x^2+4\,x+1 \;=\; A(x+1)^2+B\,x(x+1)+C\,x$$

Nullstellen des Nenners einsetzen :

$$\begin{aligned} x=0: &\qquad 1 = A \\ x=-1: &\quad -1 = -C \end{aligned}$$

Wähle weiters $x = 1$:

$$7 \;=\; 2^2+2\,B+1 \quad\Rightarrow\quad B=1$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{2\,x^2+4\,x+1}{x^3+2\,x^2+x} \;=\; \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

$\longrightarrow$

b) • *PBZ bezüglich x*. Nullstellen des Nenners: y und $-y$.

Ansatz:

$$\frac{1+x}{x^2-y^2} = \frac{1+x}{(x+y)(x-y)} = \frac{A}{x+y} + \frac{B}{x-y}$$

$\Longrightarrow$

$$1+x = A(x-y) + B(x+y)$$

Nullstellen des Nenners einsetzen:

$$\begin{aligned} x = y: &\quad 1+y = 2\,yB \\ x = -y: &\quad 1-y = -\,2\,yA \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$

$$\frac{1+x}{x^2-y^2} = \frac{\frac{y-1}{2\,y}}{x+y} + \frac{\frac{y+1}{2\,y}}{x-y} = \frac{1}{2}\,\frac{y-1}{y\,(x+y)} + \frac{1}{2}\,\frac{y+1}{y\,(x-y)}$$

Sonderfall $y=0$:

$$\frac{1+x}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

• *PBZ bezüglich y*. Nullstellen des Nenners: x und $-x$.

Ansatz:

$$\frac{1+x}{x^2-y^2} = \frac{-1-x}{(y+x)(y-x)} = \frac{C}{y+x} + \frac{D}{y-x}$$

$\Longrightarrow$

$$-1-x = C(y-x) + D(y+x)$$

Nullstellen des Nenners einsetzen:

$$\begin{aligned} y = x: &\quad -1-x = 2\,xD \\ y = -x: &\quad -1-x = -\,2\,x\,C \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{x^2-y^2} &= \frac{\frac{1+x}{2\,x}}{y+x} + \frac{\frac{-(1+x)}{2\,x}}{y-x} = \frac{1}{2}\,\frac{1+x}{x\,(y+x)} - \frac{1}{2}\,\frac{1+x}{x\,(y-x)} \\ &= \frac{1+x}{2\,x}\left(\frac{1}{y+x} - \frac{1}{y-x}\right) \end{aligned}$$

Sonderfall $x=0$:

$$\frac{1}{-y^2} = -\frac{1}{y^2}$$

$\longrightarrow$

c) Faktorisierung des Nenners aus 1 b) :

$$\frac{x}{x^3 - x^2 - c^2\,x + c^2} = \frac{x}{(x-1)\,(x-c)\,(x+c)}$$

'Generischer' Ansatz :

$$\frac{x}{(x-1)(x-c)(x+c)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-c} + \frac{C}{x+c}$$

$\rightsquigarrow$

$$x = A\,(x-c)(x+c) + B(x-1)(x+c) + C(x-1)(x-c)$$

$$x = 1 : \qquad 1 = A\,(1-c)(1+c) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{1-c^2}$$

$$x = c : \qquad c = B\,(c-1)(c+c) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2\,(c-1)}$$

$$x = -c : \qquad -c = C\,(-c-1)(-c-c) \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2\,(1+c)}$$

... aber <u>anders</u> für 'konfluente' Fälle

(mehrfache Nullstellen, Sonderfälle $c = 0,\ c = \pm 1$)

- $c = 0$: Man erhält eindeutige Darstellung

$$\frac{x}{x^2\,(x-1)} = \frac{1}{x\,(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$$

- $c = \pm 1$: Ansatz

$$\frac{x}{(x-1)^2\,(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x+1}$$

$\rightsquigarrow$ Rechnung ergibt

$$A_1 = \frac{1}{4}\,, \quad A_2 = \frac{1}{2}\,, \quad B = -\frac{1}{4}$$

Anmerkung:

– 'Generischer' Fall: drei Pole 1. Ordnung

– Sonderfälle: je ein Pol 1. Ordnung, ein Pol 2. Ordnung

$\square$

Bestimmen Sie das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0 \ldots 3\}$:

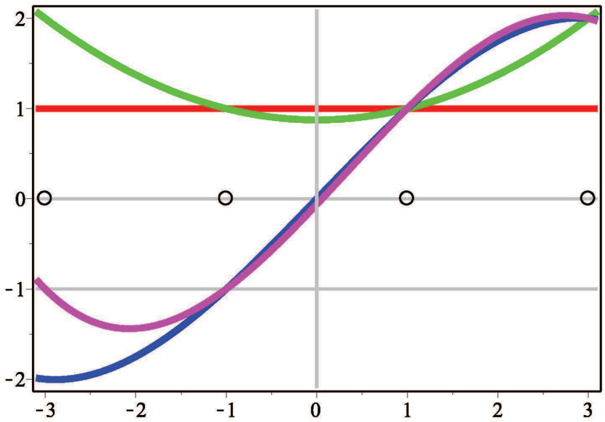
a) $\{\,(-3,+1),\ (-1,+1),\ (+1,+1),\ (+3,+1)\,\}$

b) $\{\,(-3,+2),\ (-1,+1),\ (+1,+1),\ (+3,+2)\,\}$

c) $\{\,(-3,-2),\ (-1,-1),\ (+1,+1),\ (+3,+2)\,\}$

d) $\{\,(-3,-1),\ (-1,-1),\ (+1,+1),\ (+3,+2)\,\}$

Achten Sie auf Symmetrien u. dgl.



- Lagrange-Polynome zu den Knoten $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{-3, -1, +1, +3\}$:

$$\varphi_0(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = -\frac{1}{48}\,(x+1)\,(x-1)\,(x-3)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)\,(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{1}{16}\,(x+3)\,(x-1)\,(x-3)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{1}{16}\,(x+3)\,(x+1)\,(x-3)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{48}\,(x+3)\,(x+1)\,(x-1)$$

mit $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}$.

- Eindeutiges Interpolationspolynom: $p(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i\,\varphi_i(x)$,

oder (alternativ) mittels Ansatz $p(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j\,x^j$ und Lösen des linearen Gleichungssystems $\{p(x_i) = y_i,\ i = 0 \ldots 3\}$ nach den Koeffizienten a_j.

$\longrightarrow$

Das (eindeutige) Interpolationspolynom kann für spezielle Daten auch einen geringeren Grad haben (dies hängt von den Daten ab, insbesondere von deren Symmetrieeigenschaften).

a) Man sieht: $p(x) \;\equiv\; +1$ (Grad 0, d.h. konstant)

Weiters: Rechnung ergibt

b) … $p(x) \;=\; \dfrac{7}{8} + \dfrac{1}{8}\,x^2$ (Grad 2, gerade)

c) … $p(x) \;=\; \dfrac{25}{24}\,x - \dfrac{1}{24}\,x^3$ (Grad 3, ungerade)

d) … $p(x) \;=\; -\dfrac{1}{16} + \dfrac{17}{16}\,x + \dfrac{1}{16}\,x^2 - \dfrac{1}{16}\,x^3$ (Grad 3, allgemein)

Für gerade/ungerade Datensätze ergibt sich ein gerades/ungerades Interpolationspolynom.

Anmerkung: Falls $x_i = x_j$ für ein Paar (i,j), $i \neq j$, dann ist die Interpolationsaufgabe

- unlösbar, weil *widersprüchlich*, falls $y_i \neq y_j$,
- lösbar jedoch nicht eindeutig lösbar, weil *unterbestimmt*, falls $y_i = y_j$.

Dies ist ein anschauliches Beispiel für die Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme, vgl. 'Lineare Algebra'. (Die Interpolationsaufgabe entspricht einem linearen Gleichungssystem für die Polynomkoeffizienten.)

□

a) Herr P. Olynom rechnet gerne mit Polynomen. Er sucht nun nach speziellen, nämlich nach auf ganz $\mathbb{R}$ strikt monoton wachsenden Polynomen. Geben Sie eine naheliegende Klasse derartiger Polynome vom Maximalgrad $n \in \mathbb{N}$ an.

b) Gegeben sei das quadratische Polynom $p(x) = x(x-1)$, $x \geq 0$. Geben Sie $\xi > 0$ so an, dass p auf $[\xi, \infty)$ strikt monoton wachsend ist.

c) Sei f monoton wachsend und g monoton fallend. Welches Monotonieverhalten haben die Funktionen $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ und $g \circ g$?

---

a) Wähle

$a_i = 0$ für i gerade

$a_i \geq 0$ für i ungerade

$\Rightarrow$ $p(x)$ ungerade, monoton wachsend.

Anmerkung: Es gibt auch andere monotone Polynome, z.B.

$$p(x) = x^3 - x^2 + x$$

(Beweis mittels Kurvendiskussion.)

b) $p(x) = x(x-1) = x^2 - x, \; x \geq 0$

Sei $y \geq x$ beliebig. $p(y) - p(x)$ ist durch den Linearfaktor $y - x$ teilbar, weil $y = x$ Nullstelle von $q(x) := p(y) - p(x)$. Polynomdivision durch $y - x$ ergibt

$$p(y) - p(x) = \underbrace{y^2 - y - x^2 + x}_{q(x)} = (x + y - 1)(y - x)$$

Forderung:

$$p(y) \geq p(x) \quad \Leftrightarrow \quad x + y - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1 - y$$

wobei $1 - y$ monoton fallend. Da letztere Ungleichung für y beliebig nahe an x gelten muss, folgt als Forderung

$$x \geq 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \xi = \frac{1}{2}$$

Anmerkung: Das geht viel einfacher mittels differenzieren:

$$f'(x) = 2\,x - 1 \geq 0 \quad \text{für } x \geq \frac{1}{2} \qquad \checkmark$$

c) $f \circ f$ monoton wachsend

$f \circ g$ monoton fallend

$g \circ f$ monoton fallend

$g \circ g$ monoton wachsend

□

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = (1+x)^{1/x}$, $x > 0$.

a) Liegt an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vor, d.h. existiert der Grenzwert

$$f(0) := \lim_{x \to 0+} f(x) \quad ?$$

Falls ja – wie lautet sein Wert? Wenn Sie das naheliegende Argument gefunden haben, überlegen Sie, ob dies wirklich rigoros ist.

b) Angenommen, Sie kennen den Wert des Limes nicht, Sie wollen ihn aber berechnen bzw. approximieren. Vorschlag (Rechner verwenden): Interpolieren Sie f an den Stellen $x = 0.01, 0.02, 0.03$ durch ein Polynom $p(x)$ vom Grad 2, und verwenden Sie $p(0)$ als Approximation für $f(0)$. Wie genau ist diese Approximation?

Haben Sie eine Idee, wie man die Approximation einfacher bewerkstelligen könnte?

---

a) Betrachte Nullfolge $\{x_n\} = 1/n$:

$$\lim_{x \to 0+} f(x_n) = \lim_{x \to 0+} (1+x_n)^{1/x_n} = \lim_{n \to \infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = e$$

¿ Folgt daraus bereits $\lim_{x \to 0+} f(x) = e$?

Nicht rigoros, weil der Limes für *beliebige Nullfolgen* derselbe sein muss.

Limes ist ✓; Beweis mittels Differentialrechnung:

$$\lim_{x \to 0+} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \to 0+} \exp\big(\tfrac{1}{x} \ln(1+x)\big) = \exp\big(\lim_{x \to 0+} \tfrac{1}{x} \ln(1+x)\big)$$

mit

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \frac{d}{dx} \ln(1+x)\Big|_{x=0} = 1 \quad ✓$$

(Oder: Regel von de l'Hospital anwenden.)

$\longrightarrow$

b) Rechnung analog wie in Aufgabe 3 ergibt den Näherungswert

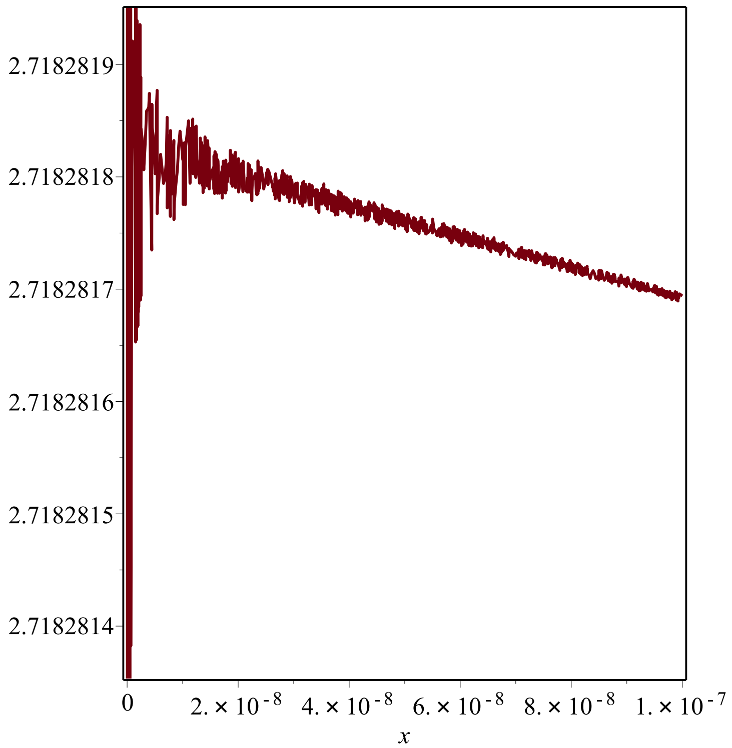
$$2.7182\,750923 \;\approx\; e = 2.7182\,818285\ldots$$

mit 5 korrekten Dezimalstellen.

Diese Vorgangsweise wird als *Extrapolation* bezeichnet.

Alternative Idee: Approximiere $f(0)$ durch $f(\varepsilon)$ mit ε sehr nahe an 0. Dies ist jedoch nicht praxistauglich aufgrund von signifikanten Rundungsfehlereffekten (*numerische Instabilität*) – typisch für derartige Fälle.

Grafik: Auswertung von $f(x)$ im Intervall $(0, 10^{-7}]$ in 10-stelliger Dezimalarithmetik:



Generell gilt: Numerische 'brute-force'-Auswertungen ($|x|$ sehr klein) zur Approximation von Limiten ($x \to 0$) funktionieren meist *nicht*, wegen der begrenzten Rechengenauigkeit.

Sehr einfaches Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)-1}{x} \;=\; 1\,,$$

aber Auswertung am Rechner ergibt 0 für hinreichend kleine x.

$\square$

a) Eine zeitabhängige Größe $X = X(t)$ gehorche dem Gesetz $X(t) = C\,e^{\lambda t}$, $t \geq 0$, mit $C = X(0) > 0$ und der Abklingrate $\lambda < 0$. (Beispiel: Radioaktiver Zerfall. Falls wir z.B. die Zeit in Stunden [h] messen, dann hat λ die Dimension 'pro Stunde', also [h^{-1}].)

Der Anfangswert C und die Abklingrate λ seien unbekannt, aber bekannt sind Messwerte $0 < X_1 = X(t_1)$ und $0 < X_2 = X(t_2) < X_1$ zu zwei Zeitpunkten $t_2 > t_1 > 0$. Geben Sie Formelausdrücke an (in Abhängigkeit von t_1, t_2, X_1, X_2) für die Werte von C und λ. Stellen Sie C in der Form $C = X_1^{\gamma_1}\, X_2^{\gamma_2}$ dar, mit geeigneten γ_1, γ_2.

b) Es gelte $X(t) = C\,e^{\lambda t}$, mit $C = X(0)$ und bekanntem $\lambda < 0$. Zu welchem Zeitpunkt t fällt der Wert $X(t)$ auf das 10^n - fache ab im Vergleich zu $X(0)$ ($n \in \mathbb{N}$)?

c) Licht, das in eine Schicht aus Glas eintritt, wird in exponentieller Weise abgeschwächt (Absorption), d.h., es gilt ein Abschwächungsgesetz analog zum Zerfallsgesetz aus a), b). Für ein konkretes Material (Glas) wird gemessen, dass die Intensität des Lichtes pro zurückgelegtem Millimeter um 1% abnimmt. Um welchen Faktor wird dann die Intensität des Lichtes durch eine 5 cm dicke Glasscheibe abgeschwächt?

---

a) Exponentiell abklingender Prozess:

$$X(t) \;=\; C\,e^{\lambda t} \quad \text{mit} \quad \lambda < 0$$

Aus

$$\begin{aligned} X(t_1) &= C\,e^{\lambda t_1} \;=\; X_1 \\ X(t_2) &= C\,e^{\lambda t_2} \;=\; X_2 \;<\; X_1 \end{aligned}$$

folgt mittels Division

$$\frac{X_2}{X_1} \;=\; \frac{\cancel{C}\,e^{\lambda t_2}}{\cancel{C}\,e^{\lambda t_1}} \;=\; e^{\lambda(t_2 - t_1)} \quad\Rightarrow\quad \lambda \;=\; \frac{\ln(X_2/X_1)}{t_2 - t_1} \;=\; \frac{\ln X_2 - \ln X_1}{t_2 - t_1}$$

Weiters:

$$\begin{aligned} C \;&=\; \frac{X_1}{e^{\lambda t_1}} \;=\; X_1\,e^{-\lambda t_1} \;=\; X_1\,e^{\ln(X_1/X_2)\,\frac{t_1}{t_2 - t_1}} \;=\; X_1 \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{\frac{t_1}{t_2 - t_1}} \\ &=\; X_1^{1 + \frac{t_1}{t_2 - t_1}}\, X_2^{-\frac{t_1}{t_2 - t_1}} \;=\; X_1^{\frac{t_2}{t_2 - t_1}}\, X_2^{-\frac{t_1}{t_2 - t_1}} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

b) Gesucht ist $t > 0$ mit $e^{\lambda t} = 10^{-n}$:

$$e^{\lambda t} = 10^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda t = \ln\left(10^{-n}\right) = \ln\left(e^{-n \ln 10}\right) = -n \ln 10$$

$$\Longrightarrow \qquad t = \frac{n \ln 10}{|\lambda|}$$

c) Für die Lichtintensität $L(s)$ gilt (exponentielle Absorption)

$$L(s) = L_0 \, e^{\lambda s} \quad (\lambda = ?\,; \quad L_0 = L(0); \; s = \text{Strecke in mm})$$

Gemessen wird:

$$L(1) \;=\; 0.99 \, L_0 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda \cdot 1} = 0.99$$

$\Longrightarrow$

$$\lambda \;=\; \ln(0.99) \;\approx\; -\,0.01005$$

$\Longrightarrow$ nach 50 mm :

$$L(50) \;=\; e^{\lambda \cdot 50} L_0 \;\approx\; 0.605 \, L_0$$

Dies kann man auch als (diskrete) geometrische Folge ansehen (Inkrement in mm):

$$L_{50} \;=\; q^{50} \, L_0, \quad q \;=\; 0.99 \;=\; e^{\lambda}$$

Die Intensität nimmt nach 5 cm auf ca. 60.5% ab.

$\square$

Skizzieren Sie die Funktionen

a) $f(x) = e^{\alpha x} \sin x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

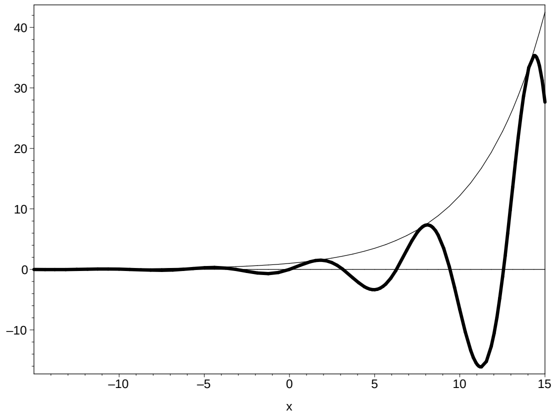
c) $f(x) = \ln \dfrac{x-1}{x+1}$

und bestimme Nullstellen und Unendlichkeitsstellen.

---

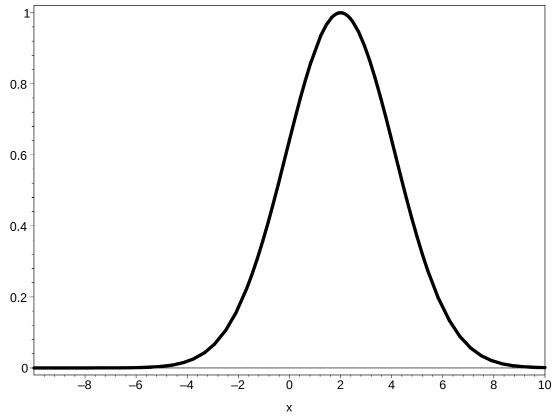
a) Nullstellen $=$ Nullstellen von sin $= \{k\pi, \pi \in \mathbb{Z}\}$

keine Unendlichkeitsstellen



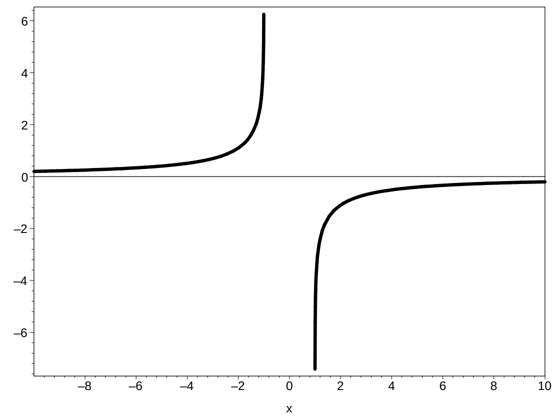
b) Gauß'sche Glockenkurve :

keine Nullstellen, keine Unendlichkeitsstellen $\qquad \alpha = 0,\ \beta = 1$:



c) Funktion nicht wohldefiniert für $x \in [-1, 1]$.

Keine Nullstellen, Unendlichkeitsstellen bei $x = -1,\ x = 1$.



□

a) Geben Sie für den Wert von $\sum_{k=1}^{n} \ln(k^m)$ einen möglichst einfachen Formelausdruck an $(m, n \in \mathbb{N})$.

b) Sei $W(x)$ definiert als die Umkehrfunktion von $f(x) = x\,e^x$, $x \geq 0$. Diese ist nicht in elementarer Weise darstellbar aber wohldefiniert, und wir nehmen sie als neue Funktion in unseren Zoo von Standardfunktionen auf.

(i) Drücken Sie eindeutige Lösung der Gleichung $x = e^{-x}$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

(ii) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x^2 = e^{-x}$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

---

a)

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k^m) = \sum_{k=1}^{n} m \ln k = m \sum_{k=1}^{n} \ln k = m \ln\Bigl(\prod_{k=1}^{n} k\Bigr) = m \ln n!$$

b) [Skizze:] Beide gesuchten Lösungen sind > 0 und eindeutig.

(i) $x = e^{-x} \iff x\,e^x = 1 \iff x = W(1)$

(ii) Rechne mit $\frac{x}{2} =: y$:

$$x^2 = e^{-x} \iff 4\,y^2 = e^{-y-y} = e^{-y}\,e^{-y} \iff 2\,y = e^{-y}$$

$$\iff y\,e^y = \tfrac{1}{2} \iff y = W(\tfrac{1}{2}) \iff x = 2\,W(\tfrac{1}{2})$$

$W(x)$ heißt *Lambert W - Funktion.*

$\square$

a) Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\omega \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$f(t) \;=\; a\cos(\omega\, t) + b\sin(\omega\, t)$$

in der Form

$$f(t) \;=\; A\,\sin(\omega\, t - \varphi) \quad \text{bzw.} \quad f(t) = A\,\cos(\omega\, t - \psi)$$

mit passenden $A \geq 0$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. Geben Sie explizit an, wie die *Amplitude* A und die *Phasenverschiebung* φ bzw. ψ mit a und b zusammenhängen.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für den Kosinus:

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \;=\; \cos^2\alpha - \sin^2\beta \;=\; \cos^2\beta - \sin^2\alpha$$
$$= \frac{1}{2}\big(\cos(2\,\alpha) + \cos(2\,\beta)\big)$$

---

a) Sei $a^2 + b^2 > 0$. Verwende Additionstheorem:

$$\sin(\omega\, t - \varphi) \;=\; \sin(\omega\, t)\cos\varphi - \cos(\omega\, t)\sin\varphi$$

$\Longrightarrow$

$$A\,\sin(\omega\, t - \varphi) \;=\; \underbrace{-A\,\sin\varphi}_{\stackrel{!}{=}\,a}\cos(\omega\, t) \;+\; \underbrace{A\,\cos\varphi}_{\stackrel{!}{=}\,b}\sin(\omega\, t)$$

Also:

$$a^2 + b^2 \;=\; A^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) \quad\Rightarrow\quad A \;=\; \sqrt{a^2+b^2}$$

Weiters:

$$\tan\varphi \;=\; \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \;=\; -\,\frac{a}{b} \quad\Rightarrow\quad \varphi \;=\; \arctan\frac{-a}{b} \;=\; -\arctan\frac{a}{b}$$

Sonderfall $b = 0$: $\varphi = -\frac{\pi}{2} = -\text{`}\arctan\infty\text{'}$

Analog für Darstellung mit cos.

$\rightsquigarrow$

$$a\cos(\omega\, t) + b\sin(\omega\, t) \;=\; A\,\sin(\omega\, t - \varphi) \;=\; A\,\cos(\omega\, t - \psi)$$

mit

$$A \;=\; \sqrt{a^2+b^2}\,, \qquad \varphi \;=\; -\arctan\frac{a}{b}\,, \quad \psi \;=\; \arctan\frac{b}{a}$$

Sonderfälle ($a = 0$ bzw. $b = 0$): Am Rechner verwendet man die Funktion

$$\operatorname{arctan2}(y, x) \;:=\; \arctan\,\tfrac{y}{x}$$

die auch für $x = 0$ korrekt auswertet, unter Vermeidung der Division durch 0.

$\longrightarrow$

b) Verwende Additionstheorem:

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\\
&= (\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta)(\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta)\\
&= (\cos\alpha\,\cos\beta)^2 - (\sin\alpha\,\sin\beta)^2\\
&= \cos^2\alpha\,(1-\sin^2\beta) - (1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta\\
&= \cos^2\alpha - \cancel{\cos^2\alpha\,\sin^2\beta} - \sin^2\beta + \cancel{\cos^2\alpha\,\sin^2\beta} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Analog zeigt man $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha$.

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\\
&= \frac{1}{2}\Big((\cos^2\alpha - \sin^2\beta) + (\cos^2\beta - \sin^2\alpha)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big((\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\cos^2\beta - \sin^2\beta)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\cos(2\,\alpha) + \cos(2\,\beta)\Big) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$\square$

a) Zeigen Sie

$$\arctan x + \arctan y \;=\; \arctan\left(\frac{x+y}{1-x\,y}\right) \tag{1}$$

b) Spielen Sie ein bisschen damit, um zu zeigen

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \;=\; \frac{\pi}{4} \tag{2}$$

---

a) Additionstheorem für Tangens:

$$\tan(u+v) \;=\; \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \, \tan v}$$

Setze $\tan u = x, \;\; \tan v = y\,,$

also: $u = \arctan x, \; v = \arctan y\,.$

Wende auf beiden Seiten arctan an :

$$u + v \;=\; \arctan x + \arctan y \;=\; \arctan\left(\frac{x+y}{1-x\,y}\right) \qquad \checkmark$$

b) Setze $x = y = \frac{1}{5}$ in (1) :

$$2\,\arctan\left(\frac{1}{5}\right) \;=\; \arctan\left(\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right) \;=\; \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$

Setze $x = y = \frac{5}{12}$ in (1) :

$$4\,\arctan\left(\frac{1}{5}\right) \;=\; 2\,\arctan\left(\frac{5}{12}\right) \;=\; \arctan\left(\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}\right) \;=\; \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$

Andererseits mit $\frac{\pi}{4} = \arctan 1$:

$$\frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \;=\; \arctan\left(\frac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}}\right) \;=\; \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$

$\Rightarrow$ (2) $\checkmark$

Anmerkung: (2) ist als *Machin'sche Formel* bekannt (John Machin, 1706).

$\square$