a) Seinen f und g zweimal differenzierbare Funktionen, $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Berechnen Sie $\frac{d^2}{dx^2} f\big(g(x)\big)$.

b) Berechnen Sie $\frac{d^n}{dx^n}\big(\sin x\, \cos x\big)$ mittels der Leibniz'schen Produktregel. Überlegen Sie sich auch einen einen einfacheren und schnelleren Weg, diese Ableitung zu berechnen.

c) Finden Sie die Produktregel für $\frac{d}{dx}\big(f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)\big)$ und beweisen sie diese mittels vollständiger Induktion.

---

a)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2} f(g(x)) &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{d}{dx} f(g(x))\Big) \\
&= \frac{d}{dx}\Big(f'(g(x)) \cdot g'(x)\Big) && \textit{Kettenregel} \\
&= f''(g(x))\, g'(x)^2 + f'(g(x))\, g''(x) && \textit{Produktregel}
\end{aligned}$$

b)

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(\sin x\, \cos x\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sin x)^{(k)}\, (\cos x)^{(n-k)}$$

mit

$$(\sin x)^{(k)} = \begin{cases} \sin x, & k = 0 \; \{\mathrm{mod}\ 4\} \\ \cos x, & k = 1 \; \{\mathrm{mod}\ 4\} \\ -\sin x, & k = 2 \; \{\mathrm{mod}\ 4\} \\ -\cos x, & k = 3 \; \{\mathrm{mod}\ 4\} \end{cases}$$

$$(\cos x)^{(n-k)} = \begin{cases} \cos x, & n-k = 0 \; \{\mathrm{mod}\ 4\} \\ -\sin x, & n-k = 1 \; \{\mathrm{mod}\ 4\} \\ -\cos x, & n-k = 2 \; \{\mathrm{mod}\ 4\} \\ \sin x, & n-k = 3 \; \{\mathrm{mod}\ 4\} \end{cases}$$

Schreibweise $k = \ell \; \{\mathrm{mod}\ 4\}$: $k/4$ ergibt Rest ℓ $(\ell = 0, 1, 2, 3)$

Direkte ('brute-force') Anwendung der Leibniz-Regel ist hier nicht sehr geschickt (mehrere Fallunterscheidungen bezüglich n).

Besser: rechnen und 'Muster erkennen' $(s = \sin x,\ c = \cos x)$:

$$n = 0: \qquad \frac{d^0}{dx^0} sc = sc$$

$$n = 1: \qquad \frac{d^1}{dx^1} sc = cc - ss$$

$$n = 2: \qquad \frac{d^1}{dx^1} sc = -sc - cs - cs - cs = -4\, sc$$

$\longrightarrow$

Mit $sc = 2^{-1}\,\sin(2x)$ und $cc - ss = 2^0\,\cos(2x)$ folgt mittels Induktion:

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(\sin x\,\cos x\big) \;=\; 2^{n-1}\cdot\begin{cases} \sin(2x), & n = 0 \ \{\mathrm{mod}\ 4\} \\ \cos(2x), & n = 1 \ \{\mathrm{mod}\ 4\} \\ -\sin(2x), & n = 2 \ \{\mathrm{mod}\ 4\} \\ -\cos(2x), & n = 3 \ \{\mathrm{mod}\ 4\} \end{cases}$$

Alternativvariante:

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(\sin(x)\cdot\cos(x)\big) \;=\; \frac{d^n}{dx^n}\Big(\frac{1}{2}\,\sin(2x)\Big) \;=\; \dots \quad \checkmark$$

c) Rechnen:

$$n = 1: \qquad \big(f_1\big)' \;=\; f_1'$$

$$n = 2: \qquad \big(f_1\,f_2\big)' \;=\; f_1'\,f_2 + f_1\,f_2'$$

$$\begin{aligned} n = 3: \qquad \big(f_1\,f_2\,f_3\big)' &= \big(f_1\,f_2\big)'f_3 + \big(f_1\,f_2\big)\,f_3' \\ &= \big(f_1'\,f_2 + f_1\,f_2'\big)\,f_3 + \big(f_1\,f_2\big)\,f_3' \\ &= f_1'\,f_2\,f_3 + f_1\,f_2'\,f_3 + f_1\,f_2\,f_3' \end{aligned}$$

Behauptung:

$$\big(f_1\,f_2\,\cdots\,f_n\big)' \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}_0^n,\ |k|=1} f_1^{(k_1)}\,\cdots\,f_n^{(k_n)}$$

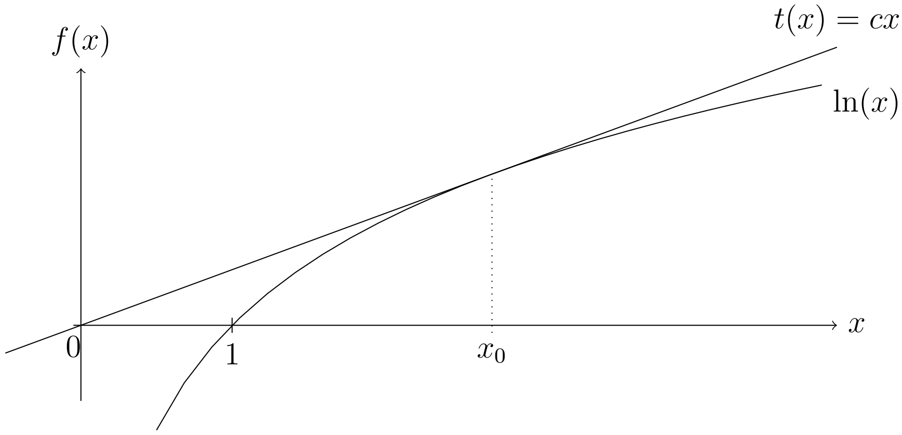
mit den *Multiindizes* $k = (1,0,\dots,0),\,(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)$.

Beweis: Induktionsschritt $n \mapsto n+1$

$$\begin{aligned} &\big(f_1\,f_2\,\cdots\,f_n\,f_{n+1}\big)' \\ &= \big(f_1\,f_2\,\cdots\,f_n\big)'f_{n+1} + \big(f_1\,f_2\,\cdots\,f_n\big)\,f_{n+1}' \\ &\overset{\text{IND}}{=} \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_0^n,\ |k|=1} f_1^{(k_1)}\,\cdots\,f_n^{(k_n)}\Big)\,f_{n+1}^{(0)} + \big(f_1^{(0)}\,f_2^{(0)}\,\cdots\,f_n^{(0)}\big)\,f_{n+1}^{(1)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}_0^{n+1},\ |k|=1} f_1^{(k_1)}\,\cdots\,f_{n+1}^{(k_{n+1})} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\square$

a) Bestimmen Sie c und x_0 so, dass $t(x) = c\,x$ die Tangente an den Graphen von $f(x) = \ln(x)$



an der Stelle x_0 ist.

b) Für welche $c > 0$ ist $f(x) = \ln(x)$ auf (c, ∞) eine Kontraktion (Lipschitzkonstante < 1)?

c) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes: $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ für alle $x > -1$.

d) Sei $f(x) = x^3 - 3\,x + 4$. Bestimmen Sie ein $\xi \in (a, b) = (1, 2)$ so dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ gilt.

---

a) Forderung:

$$t(x_0) = c\,x_0 = \ln x_0 \qquad t'(x_0) = c = \tfrac{d}{dx} \ln x \,\Big|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}$$

$\Rightarrow \quad c\,x_0 = 1$, daher

$$x_0 = e^1, \qquad c = e^{-1}$$

b) Mittelwertsatz $\Rightarrow$ für $x, y \in (c, \infty)$, mit $f'(x) = 1/x$:

$$|f(x) - f(y)| \le \sup_{\xi \in [c,\infty)} |f'(\xi)| \cdot |x - y|$$

$$= \frac{1}{c} \cdot |x - y| \qquad \checkmark \text{ für } c > 1$$

c) Mittelwertsatz $\Rightarrow$ Für $f(x) = \sqrt{1+x}$ gilt

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)\,(x - 0), \quad f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}}$$

mit ξ zwischen 0 und x. $\Rightarrow$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+\xi}}$$

2 Fälle:

$$x > 0: \quad 0 < \frac{x}{2\sqrt{1+\xi}} < \frac{x}{2} \qquad \checkmark$$

$$x \in (-1, 0): \quad \frac{x}{2\sqrt{1+\xi}} < \frac{x}{2} < 0 \qquad \checkmark$$

$\longrightarrow$

d)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(2^3-3\cdot 2+4)-(1-3+4)}{2-1} = 4$$

$$f'(x) = 3\,x^2-3 \overset{!}{=} 4 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \xi = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1.5275 \in (1,2)$$

$\square$

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mithilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (vgl. UE 5, Aufgabe 5)

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

d) $(*)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\beta^x}$ Wie sind α und β zu wählen, damit der Limes existiert?

---

a) de l'Hospital für 0/0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

Oder direkt als Ableitung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \frac{d}{dx} \ln x \,\Big|_{x=1} = 1$$

b)

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

Mit **a)** und der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x\cos x + \sin x} && \text{de l'Hospital für } 0/0 \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{-x\sin x + \cos x + \cos x} && \text{de l'Hospital für } 0/0 \\
&= \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

d) Es muss $\beta \geq 0$ gelten, damit $\beta^x \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- $\beta = 0:$ Limes $= 1$ für $\alpha = 0$, Limes $= 0$ für $\alpha < 0$.
- $\beta > 0:$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\beta^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha\, x^{\alpha-1}}{\beta^x \ln\beta} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\, x^{\alpha-n}}{\beta^x (\ln\beta)^n}$$

  - Mit $n > \alpha$ existiert der Limes für $\beta > 1$ und ist gleich 0.
  - Für $0 < \beta < 1$ existiert der Limes nicht (de l'Hospital für $\frac{\beta^{-x}}{x^{-\alpha}}$).
  - Für $\beta = 1$ existiert der Limes falls $\alpha \leq 0$.

□

a) Wie stark ändert sich in erster Näherung (lineare Approximation) die Fläche eines Kreises bzw. einer Kugel, wenn der Radius r um Δr vergrößert wird?

Hinweis: Das Volumen der Kugel beträgt $V = \frac{4\pi}{3} r^3$.

b) Die Bahnkurve eines Geschosses, das vom Punkt $(0,0)$ mit vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α abgeschossen wird, wird durch die Parabelgleichung

$$y(x) = \tan\alpha \cdot x - \frac{g\,x^2}{2\,v_0^2\,\cos^2\alpha}$$

beschrieben, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Aus der Gleichung folgt, dass man ein Ziel $(x_0, 0)$ entlang zweier Bahnen erreichen kann, und zwar mit den Winkeln α_0 und $\frac{\pi}{2} - \alpha_0$. Berechnen Sie aus obiger Gleichung die Reichweite des Geschosses und x_0 als Funktion des Winkels α_0. Untersuchen Sie, ob für einen der beiden Winkel der Zielpunkt $(x_0, 0)$ empfindlicher auf Ungenauigkeiten in der Einstellung des Winkels reagiert als für den anderen.

Zusatzfrage: Durch welche Funktion wird die Höhe y in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben? Zeigen Sie, dass für diese Funktion $y(t)$ gilt $\ddot{y}(t) \equiv -g$.

Hinweis: In x-Richtung wirkt keine Kraft, daher gilt für die Funktion $x(t)$: $\ddot{x}(t) \equiv 0$. Wie lautet $x(t)$?

---

a) Kreis: $A(r) = \pi\,r^2$, $A'(r) = 2\,\pi\,r \quad \Rightarrow$

$$A_{r+\Delta r} - A_r \;\approx\; 2\,\pi\,r\,\Delta r$$

Kugel: $V(r) = \dfrac{4\,\pi}{3}\,r^3$, $V'(r) = 4\,\pi\,r^2 \quad \Rightarrow$

$$V_{r+\Delta r} - V_r \;\approx\; 4\,\pi\,r^2\,\Delta r$$

Alternative, ohne Ableitung (d = Dimension):

$$\big(r + \Delta r\big)^d \;=\; r^d + d\,(\Delta r)^{d-1} + \mathcal{O}\big((\Delta r)^2\big) \quad \text{für} \quad \Delta r \to 0,$$

Vernachlässigung von ‘Termen höherer Ordnung’ ($\mathcal{O}\big((\Delta r)^2\big)$) ergibt gleiches Resultat. Man beachte die Abhängigkeit von der Dimension d.

Für komplizierter gebaute Funktionen ist Verwendung der Ableitung meist einfacher, siehe **b)**.

⟶

b) Für die Reichweite $x_0 = x_0(\alpha) > 0$ gilt $y(x_0) = 0$:

$$0 \;=\; \tan\alpha \cdot \cancel{x_0} - \frac{g\, x_0^{\cancel{2}}}{2\, v_0^2\, \cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \qquad x_0(\alpha) \;=\; \frac{2\, v_0^2}{g} \tan\alpha\, \cos^2\alpha \;=\; \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

– Gleiche Reichweite für Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

– Maximale Reichweite ist $\frac{v_0^2}{g}$ für $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Fehlerrechnung mittels linearer Approximation (Ableitung):

$$\big|x_0(\alpha + \Delta\alpha) - x_0(\alpha)\big| \;\approx\; |x_0'(\alpha)| \cdot |\Delta\alpha| \;=\; \frac{2\, v_0^2}{g}\, |\cos(2\alpha)| \cdot |\Delta\alpha|$$

Genau gleich für Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ wegen $\cos(2(\frac{\pi}{2} - \alpha)) = \cos(\pi - 2\alpha) = \cos(2\alpha)$.

Zusatzfrage:

Es gilt $\ddot{x}(t) = 0$, $\dot{x}(t) = c$, $x(t) = c\,t + d$, mit

$$x(0) = d = 0, \quad \dot{x}(0) = c = v_0\, \cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad x(t) \;=\; v_0\, \cos\alpha\, t$$

Dann gilt für $y(t) := y(x(t))$:

$$y(t) = \tan\alpha\, v_0\, \cos\alpha \cdot t - \frac{g\, v_0^2 \cos^2\alpha \cdot t^2}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha} = v_0\, \sin\alpha \cdot t - \frac{t^2\, g}{2}$$

und $\ddot{y}(t) = -g$. ✓

□

Berechnen Sie jeweils die Ableitung der Umkehrfunktion mittels Rechenregel 9.10 im Skriptum:

a) $f(x) = \tan(x)\,,\qquad f^{-1}(y) = \arctan y$

b) $(*)$ $g(x) = x\,e^x\,,\qquad g^{-1}(y) = W(y) =$ Lambert W-Funktion (vgl. UE 5, Aufgabe 8b)).

Hinweis: Drücken Sie $W'(y)$ mittels $W(y)$ aus.

---

a) $f'(x) = 1 + \tan x^2$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1 + (\tan(f^{-1}(y))^2} = \frac{1}{1+y^2} = \arctan'(y)$$

b) $g'(x) = e^x + x\,e^x = g(x)/x + g(x)$

$$\begin{aligned} W'(y) &= \frac{1}{g'(W(y))} = \frac{1}{e^{W(y)} + W(y)\,e^{W(y)}} \\ &= \frac{1}{\frac{g(W(y))}{W(y)} + g(W(y))} \\ &= \frac{1}{\frac{y}{W(y)} + y} \\ &= \frac{W(y)}{y\,(1+W(y))} \end{aligned}$$

$\square$

a) Finden Sie 4 verschiedene elementare Funktionen $u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x)$, die der Differentialgleichung

$$\frac{d^4u(x)}{dx^4} = u^{IV}(x) = c^4\, u(x)$$

genügen.

Anmerkung: Diese Funktionen sind *linear unabhängig*, d.h., falls $a_1u_1(x)+\cdots+a_4u_4(x) = 0$ für alle x, dann ist $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. (Siehe dazu 'Praktische Mathematik I', Kapitel 5.)

b) Zeigen Sie, dass jede Linearkombination der Funktionen $u_i(x)$ aus a) ebenfalls eine Lösung ist.

Anwendung: Eine Differentialgleichung dieses Typs beschreibt z.B. die Biegelinie eines elastisch verformbaren eingespannten Balkens.

c) Betrachten Sie $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$, $v_4(x)$ mit

$$\begin{aligned} v_1'(x) &= v_2(x) \\ v_2'(x) &= v_3(x) \\ v_3'(x) &= v_4(x) \\ v_4'(x) &= c^4\, v_1(x) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass v_1 Lösung von $u^{IV}(x) = c^4\, u(x)$ ist.

---

a)

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{cx} \quad \text{oder} \quad \cosh x \\ u_2(x) &= e^{-cx} \quad \text{oder} \quad \sinh x \\ u_3(x) &= \cos(cx) \\ u_4(x) &= \sin(cx) \end{aligned}$$

erfüllen die Differentialgleichung und sind linear unabhängig.

b)

$$\begin{aligned} y(x) &= a_1\, u_1(x) + a_2\, u_2(x) + a_3\, u_3(x) + a_4\, u_4(x) \\ y^{IV}(x) &= a_1\, u_1^{IV}(x) + a_2\, u_2^{IV}(x) + a_3\, u_3^{IV}(x) + a_4\, u_4^{IV}(x) \\ &= a_1\, u_1(x) + a_2\, u_2(x) + a_3\, u_3(x) + a_4\, u_4(x) \\ &= y(x) \qquad \checkmark \end{aligned}$$

c) v_1 erfüllt die gegebene Differentialgleichung:

$$v_1^{IV}(x) = v_2'''(x) = v_3''(x) = v_4'(x) = c^4\, v_1(x) \qquad \checkmark$$

$\square$

a) Sei

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ x + x^2 & \text{für } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Ist f ist stetig? Ist f stetig differenzierbar? Ist f zweimal stetig differenzierbar? Berechnen Sie die Ableitungen dort wo sie existieren. Was fällt Ihnen auf?

b) Sei

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0\,, \\ \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0\,. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und dass $f'(0) > 0$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass es kein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Was bedeutet das? (Ein Ähnliches Beispiel wurde in der VO besprochen.)

---

a) f ist auf $(-\infty, 0)$ und $0, \infty)$ stetig und beliebig oft stetig differenzierbar.

Untersuchung der Stelle $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) \;=\; 0 \;=\; \lim_{x\to 0+} f(x) \quad \rightsquigarrow \quad \text{stetig an } x = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2\,x, & x < 0 \\ 2\,x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

1. Ableitung:

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) \;=\; 1 \;\neq\; 0 \;=\; \lim_{x\to 0+} f'(x)$$

$\rightsquigarrow$ nur links- und rechtsseitig differenzierbar an $x = 0$.

2. Ableitung:

$$f''(x) \equiv 2 \quad ?!!$$

Versuche $f''(0)$ direkt zu bestimmen:

$$f''(0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - 2\,f(0) + f(0-h)}{h^2} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{h + h^2 - 0 + h^2}{h^2} \;=\; \infty$$

$f''(0)$ existiert natürlich *nicht*, da bereits $f'(0)$ nicht existiert.

Erklärung: Für die Funktion $g(x) \equiv 2$ gilt $g(x) = f''(x)$ für $x \neq 0$. $g(x)$ ist auch für $x = 0$ wohldefiniert, aber $g(0)$ kann nicht als $f''(0)$ interpretiert werden. Vorsicht Falle!

Anmerkung: Gleiche Rechnung für die Ableitungen von

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ 1 + x + x^2 & \text{für } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist jedoch nicht einmal stetig an $x = 0$. [Skizze] $\longrightarrow$

b)

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{x}{2} + x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

(i) $f'(x) = \frac{1}{2} + 2\,x\,\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$.

Für $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{2} + h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h} \;=\; \frac{1}{2}$$

$\rightsquigarrow$ f ist an $x = 0$ differenzierbar, mit $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$.

(ii) Betrachte $f'(x)$ in einem beliebigen Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$:

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{2} + 2\,x\,\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

Wähle $x = 1/y$ mit $y = 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\cos y = -1$. In $(-\varepsilon, \varepsilon)$ liegen ∞ viele solche x, mit

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{2} + 0 - 1 = -\frac{1}{2} \;<\; 0 \qquad \checkmark$$

$\square$

a) Seien f und g zwei auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(0) = g(0)$ und $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Verwenden Sie a), um das Additionstheorem für den Cosinus auf das Additionstheorem für den Sinus zurückzuführen.

c) Verwenden Sie a), um das Additionstheorem für den Arcustangens nachzuweisen (siehe UE 5, Aufgabe 10).

d) (∗) Verwenden Sie a) dazu, um den Binomischen Lehrsatz induktiv zu beweisen.

Hinweis: Differenzieren Sie jeweils die linke und die rechte Seite.

---

a) Mittelwertsatz $\Rightarrow$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$(f-g)(x_1) - (f-g)(x_2) = (f'-g')(\xi)(x_1 - x_2) = 0 \quad (\xi \in [\xi_1, \xi_2])$$

Für $x_1 = x$ und $x_2 = 0$ folgt $f(x) = g(x)$. ✓

Genauso für $f(x_0) = g(x_0)$ und beliebiges x_0.

b) Sei $f(x) = \cos(x+y)$, $g(x) = \cos x \, \cos y - \sin x \, \sin y$, mit $f(0) = g(0) = \cos y$. Differenzieren:

$$f'(x) = -\sin(x+y)$$

$$g'(x) = -\sin x \, \cos y - \cos x \, \sin y = -\sin(x+y) = f'(x)$$

aufgrund des Additionstheorems für sin. Mit **a)** folgt $f(x) \equiv g(x)$. ✓

c) Sei $f(x) = \arctan x + \arctan y$ $g(x) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, mit $f(0) = g(0) = \arctan y$. Differenzieren:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1-xy-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}$$

$$= \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}$$

$$= \frac{1+y^2}{(1+y^2)(1+x^2)}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} = f'(x)$$

Mit **a)** folgt $f(x) \equiv g(x)$. ✓

$\longrightarrow$

d) Induktionsanfang: $n = 0$ $\checkmark$

Nehme induktiv an, ‘Binomi’ ist richtig für $n-1$.

Induktionsschritt $n-1 \to n:$

Sei $f(x) = (x+y)^n$, $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$, mit $f(0) = g(0) = y^n$.

Differenzieren:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= n\,(x+y)^{n-1} \\
g'(x) &= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} \binom{n}{k}\, k\, x^{k-1}\, y^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\, n\, x^{k-1}\, y^{n-k} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k\, y^{n-k} \\
&\overset{\text{IND}}{=} n(x+y)^{n-1} = f'(x)
\end{aligned}
$$

Mit **a)** folgt $f(x) \equiv g(x)$. $\checkmark$

$\square$

Gegeben ist die Funktion

$$g\colon D \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+c}\right), \quad c > 0.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D von g in Abhängikeit von c.
Liegt für $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vor?

b) Untersuchen Sie mittels der Ableitung, für welche $x \in D$ die Funktion g strikt monoton wachsend ist.

c) Geben Sie für den Fall $c = 2$ die Gleichung der Tangente an der positiven Nullstelle der Funktion g an, d.h. an der Stelle $(x_0, g(x_0))$ mit $x_0 > 0$ und $g(x_0) = 0$.

---

a) Logarithmus will positives Argument :

$$\frac{x^2}{x+c} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -c \ \text{ und } \ x \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad D = (-c, \infty) \setminus \{0\}$$

Keine hebbare Unstetigkeit an $x = 0$, da $g(x) \to -\infty$ für $x \to 0$.

b)

$$g'(x) = \frac{x + 2\,c}{x(x+c)}\,, \quad g \text{ streng monoton wachsend für } x \in (0, \infty)$$

c)

$$\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{x+2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2,$$

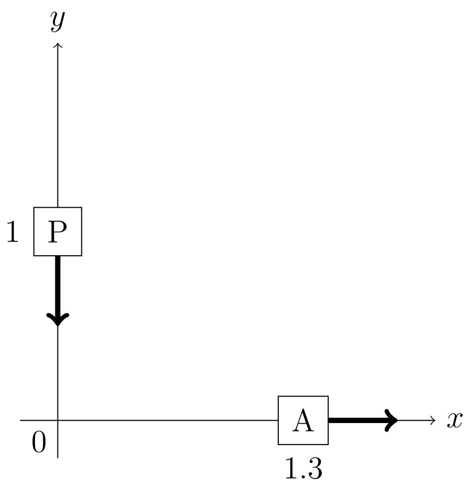
mit $g'(2) = \frac{3}{4}$

Tangente: $y = \frac{3}{4}(x - 2)$

$\square$

Ein Streifenwagen der Polizei (P) vorfolgt ein davonjagendes Auto (A) und nähert sich von Norden her einer rechtwinkeligen Kreuzung. Das verfolgte Auto ist in der Kreuzung abgebogen und bewegt sich nun genau nach Osten. Als der Streifenwagen 1 km nördlich der Kreuzung und das Auto 1.3 km östlich der Kreuzung ist, stellt die Polizei per Radar fest, dass der Abstand der beiden Autos um 32 km/h zunimmt. Der Streifenwagen fährt in diesem Moment 100 km/h. Wie groß ist die Geschwindigkeit des verfolgten Autos in diesem Moment?

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $P(t)$ und $A(t)$, die die Bewegungen des Streifenwagens und des verfolgten Autos entlang der vertikalen bzw. der horizontalen Achse beschreiben, d.h. deren Abstand von der Kreuzung in Abhängigkeit von der Zeit t. Betrachten Sie weiters die Funktion $D(t)$, die den Abstand der beiden Autos in der Ebene beschreibt. (t ist die Zeit in Stunden, $P(t), A(t)$ und $D(t)$ haben km-Werte.) Gesucht ist $\dot{A}(t)$ zum Zeitpunkt der Radarpeilung (werten Sie das zum Schluss am Rechner aus).



Zum Zeitpunkt t^* der Radarmessung gilt laut Angabe

$$P(t^*) = 1, \quad \dot{P}(t^*) = -100, \quad A(t^*) = 1.3, \quad \dot{D}(t^*) = 32$$

Weiters für t in der Nähe von t^*:

$$D(t)^2 = P(t)^2 + A(t)^2 \qquad \text{(Pythagoras)}$$

und

$$D(t^*) = \sqrt{P(t^*)^2 + A(t^*)^2} \approx 1.64$$

Differenzieren (Kettenregel) $\rightsquigarrow$

$$2\,D(t)\dot{D}(t) = 2\,P(t)\dot{P}(t) + 2\,A(t)\dot{A}(t)$$

$$\dot{D}(t) = \frac{1}{D(t)}\big(P(t)\dot{P}(t) + A(t)\dot{A}(t)\big)$$

$\Rightarrow$ für $t = t^*$:

$$32 = \frac{1}{1.64}\big(1 \cdot (-100) + 1.3 \cdot \dot{A}(t^*)\big)$$

Auflösen nach $A'(t^*)$ $\rightsquigarrow$

$$A'(t^*) \approx 117.3\,\mathrm{km/h}$$

$\square$