Finden Sie eine Stammfunktion von $f(x)$ mittels partieller Integration / Substitution:

a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ **b)** $f(x) = \ln(1+x^2)$ **c)** $f(x) = e^{ax}\sin(bx)$ $(a \neq 0)$

---

a) Substitution + partielle Integration:

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2\,t}\,dx \\ dx = 2\,t\,dt \end{array} \right|$$

$$= 2\int \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{e^t}_{v'}\,dt = 2\left(\underbrace{t}_{u}\,\underbrace{e^t}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{e^t}_{v}\,dt\right)$$

$$= 2\,t\,e^t - e^t + C = 2\,e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right) + C$$

b) Partielle Integration:

$$\int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\ln(1+x^2)}_{v}\,dx = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\ln(1+x^2)}_{v} - \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\frac{2\,x}{1+x^2}}_{v'}$$

mit

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x + C$$

$\Longrightarrow$

$$\int \ln(1+x^2)\,dx = x\,\ln(1+x^2) - 2\,x + 2\,\arctan x + C$$

c) $2\times$ partiell integrieren:

$$I = \int \underbrace{e^{ax}}_{u'}\,\underbrace{\sin(bx)}_{v}\,dx = \underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{u}\,\underbrace{\sin(bx)}_{v} - \int \underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{u}\,\underbrace{b\,\cos(bx)}_{v'}\,dx$$

mit

$$\int \underbrace{e^{ax}}_{u'}\,\underbrace{\cos(bx)}_{v}\,dx = \underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{u}\,\underbrace{(\cos(bx))}_{v} - \int \underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{u}\,\underbrace{(-b\,\sin(bx))}_{v'}\,dx$$

$$= \frac{e^{ax}}{a}\,\cos(bx) + \frac{b}{a}\,I$$

$\Longrightarrow$

$$I = \frac{1}{a}\,e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}\,e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\,I\,,$$

$$I = \frac{e^{ax}\left(a\,\sin(bx) - b\,\cos(bx)\right)}{a^2+b^2} + C \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

$\square$

Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von

$$I = \frac{x^3+1}{x^2\,(x^3-1)}$$

Partialbruchzerlegung $\rightsquigarrow$

$$\frac{x^3+1}{x^2\,(x^3-1)} = \frac{x^3+1}{x^2\,(x-1)\,(x^2+x+1)} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3\,(x-1)} + \frac{2\,(1-x)}{3\,(x^2+x+1)}$$

$\Longrightarrow$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2(x^3-1)} = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3}\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx$$

mit

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\,,$$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\,,$$

und

$$\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2}-x}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2\,x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\,.$$

Verwende Substitution bzw. quadratische Ergänzung:

$$\int \frac{2\,x+1}{x^2+x+1}\,dx = \left|\begin{array}{l} x^2+x+1 = u \\ (2\,x+1)\,dx = du \end{array}\right|$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln(x^2+x+1)\,,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x^2+x+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\frac{4}{3}\,(x+\frac{1}{2})^2+1} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,(x+\frac{1}{2})\right)^2+1}$$

$$= \left|\begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{3}}\,(x+\frac{1}{2}) = u \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,du \end{array}\right| = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\arctan u = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\,(x+\tfrac{1}{2})\right)$$

$\Longrightarrow$

$$I = \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}\,(2\,x+1)\right) + C$$

$\square$

a) Sei $g = f^{-1}$. Sei weiters F die Stammfunktion von f und G die Stammfunktion von g.

Zeigen Sie: $G(x) = x\,g(x) - F(g(x))$.

b) Berechnen Sie $\int \arctan x\,dx$ mit Hilfe von **a)**.

c) Berechnen Sie $\int W(x)\,dx$ mit Hilfe von **a)**, wobei $W(x)$ die Lambertsche W-Funktion bezeichnet.

---

a) Zu zeigen: $G'(x) = g(x)$

$$\begin{aligned} G'(x) &= x\,g'(x) + g(x) - F'(g(x))\,g'(x) \\ &= x\,g'(x) + g(x) - f(g(x))\,g'(x) \\ &= \cancel{x\,g'(x)} + g(x) - \cancel{x\,g'(x)} = g(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

b) Mit $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und [a] $F(x) = -\ln(\cos x) + C$ folgt für $g(x) = \arctan x$:

$$\begin{aligned} \int \arctan x\,dx &= x \arctan x + \ln(\cos(\arctan x)) \\ &= x \arctan x + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \end{aligned}$$

denn aus $x = \frac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)}$ folgt $\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1-x^2}$.

c) Mit $f(x) = x\,e^x$ und $F(x) = x\,e^x - e^x$ folgt für $g(x) = W(x)$:

$$\begin{aligned} \int W(x)\,dx &= x\,W(x) - \underbrace{W(x)\,e^{W(x)}}_{=x} + \underbrace{e^{W(x)}}_{=x/W(x)} \\ &= x\left(W(x) + \frac{1}{W(x)} - 1\right) + C \end{aligned}$$

$\square$

[a] Substitution; $\cos x = u$

Überprüfen Sie, ob folgende uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie ggf. ihren Wert.

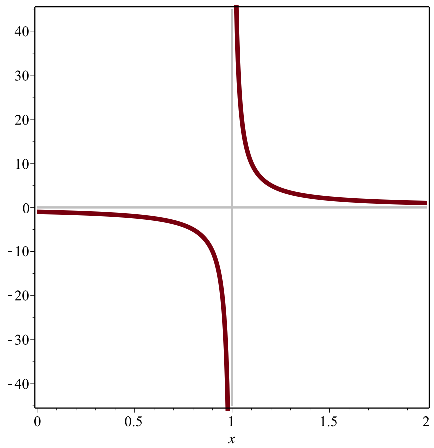
a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

---

a) Pol 1. Ordnung an $x = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{x-1} &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x-1} + \lim_{\delta\to 0+}\int_{1+\delta}^2 \frac{dx}{x-1} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln|x-1|\,\Big|_{x=0}^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0} \ln|x-1|\,\Big|_{x=1+\delta}^{2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln\varepsilon - \lim_{\delta\to 0+} \ln\delta \;=\; -\infty + \infty\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert nicht.



Jedoch:

$$\text{HW}\int_0^2 \frac{dx}{x-1} \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0+}\big(\ln\varepsilon - \ln\varepsilon\big) \;=\; 0$$

(Cauchy'scher Hauptwert).

b) Unendlichkeitsstelle an $x = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{c\to 1-}\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{c\to 1-} \arcsin x\,\Big|_{x=0}^{c} \;=\; \arcsin 1 - \arcsin 0 \;=\; \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

konvergent.

□

Geben Sie die allgemeine Darstellung von

$$I_{m,n} \;=\; \int_0^1 x^m\,(1-x)^n\;dx$$

in Abhängigkeit von $m, n \in \mathbb{N}_0$ an.

Hinweis: Leiten Sie eine rekursive Darstellung her.

Partiell integrieren:

$$\int_0^1 \underbrace{x^m}_{u'}\,\underbrace{(1-x)^n}_{v}\,dx \;=\; \underbrace{\underbrace{\frac{x^{m+1}}{m+1}}_{u}\,\underbrace{(1-x)^n}_{v}\,\Big|_0^1}_{=0} - \int_0^1 \underbrace{\frac{x^{m+1}}{m+1}}_{u}\,\underbrace{\Big(-n\,(1-x)^{n-1}\Big)}_{v'}\,dx$$

$\Longrightarrow$

$$I_{m,n} \;=\; \frac{n}{m+1}\,I_{m+1,n-1}$$

$\leadsto$ Induktionskette:

$$\begin{aligned} I_{m,n} \;&=\; \frac{n}{m+1}\,I_{m+1,n-1} \\ &=\; \frac{n}{m+1}\,\frac{n-1}{m+2}\,I_{m+2,n-2} \\ &=\; \ldots \\ &=\; \frac{n}{m+1}\,\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{1}{m+n}\,I_{m+n,0} \end{aligned}$$

mit

$$I_{m+n,0} \;=\; \int_0^1 x^{m+n}\,dx \;=\; \frac{1}{m+n+1}$$

$\Longrightarrow$

$$I_{m,n} \;=\; \frac{n}{m+1}\,\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{1}{m+n}\,\frac{1}{m+n+1} \;=\; \frac{m!\;n!}{(m+n+1)!}$$

Anmerkung: Alternative (Binomialentwicklung für $(1-x)^n$) ist hier nicht sehr hilfreich.

$\square$

a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums die Konvergenz der Reihen

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^\alpha}$

in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Hinweis: (i) ist im Vorlesungsskriptum abgehandelt. Vollziehen Sie das nach, und führen Sie (ii) auf (i) zurück, indem Sie das entsprechende Integral geeignet substituieren.

b) Der Beweis des Integralkriteriums beruht darauf, dass die Reihe einer Riemann-Summe für das Integral entspricht. Im Konvergenzfall gilt auch

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \le \int_m^\infty f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

Geben Sie mit Hilfe dieser beiden Ungleichungen je ein Intervall (a, b) an mit

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \in [a, b]$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2} \in [a, b]$

---

a) (i) Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \le 1$, da das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{c^{1-\alpha}-1}{\alpha-1}\,, & \alpha \ne 1, \\ \ln c\,, & \alpha = 1 \end{cases}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \le 1$ divergiert.

(ii) Analoge Überlegung für $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^\alpha}$, mit

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\,(\ln x)^\alpha} = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ du = dx/x \end{matrix} \right| = \int_{\ln 2}^\infty \frac{du}{u^\alpha}\,,$$

mit gleicher Folgerung wie für **a)**.

$\longrightarrow$

b) (i) Aus

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3} \le \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} - 1 \le \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} .$$

Daher:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \le 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = 1 + \tfrac{1}{2} ,$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \ge \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \tfrac{1}{2} .$$

Also:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \in \left[\frac{1}{2} , \frac{3}{2} \right] .$$

(ii) Aus

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2} \le \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^2} \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2}$$

folgt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2} - \frac{1}{2\,(\ln 2)^2} \le \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^2} \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2} .$$

Daher:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2} \le \frac{1}{2\,(\ln 2)^2} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^2} = \frac{1}{2\,(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2} ,$$

und

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2} \ge \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2} .$$

Also:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2} \in \left[\frac{1}{\ln 2} , \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2\,(\ln 2)^2} \right] \approx [1.44, 2.48] .$$

$\square$

Bestimmen Sie die Taylorreihen von $f(x) := \sqrt{1+x}$ und $g(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

- Ableitungen von $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\,(x+1)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\,(x+1)^{-\frac{3}{2}} \\ f'''(x) &= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)\,(x+1)^{-\frac{5}{2}} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{3-2\,k}{2}\Big)\,(x+1)^{\frac{1-2\,n}{2}} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Taylorreihe an der Stelle $x_0 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{3-2\,k}{2}\Big)\,\frac{x^n}{n!}$$

- Es gilt $g(x) = 2\,f'(x)$, und daher (gliedweise Differentiation)

$$\begin{aligned} g(x) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{3-2\,k}{2}\Big)\,\frac{n\,x^{n-1}}{n!} \\ &= 1 + 2\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{3-2\,k}{2}\Big)\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n+1}\frac{3-2\,k}{2}\Big)\,\frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{1-2\,k}{2}\Big)\,\frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

$\square$

Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von

$$\int_0^x \frac{\ln(1-\xi)}{\xi}\, d\xi \,,$$

sowie deren Konvergenzintervall.

Hinweis: Betrachten Sie die Taylorreihe von $\ln(1-x)$ bezüglich $x_0 = 0$.

Die Taylorreihe von $g(x) = \ln(1-x)$ an $x_0 = 0$,

$$g(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,,$$

konvergiert für alle $x \in (-1,1)$ gegen $g(x)$ (siehe Kapitel 14).

$$\Longrightarrow \qquad \frac{g(x)}{x} \;=\; \frac{\ln(1-x)}{x} \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\,,$$

und daraus mittels gliedweise Integration (Satz 14.3 !)

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\ln(1-\xi)}{\xi}\, d\xi \;&=\; -\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{n-1}}{n}\, d\xi \\
&=\; -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\xi^{n-1}}{n}\, d\xi \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \;=\; -\operatorname{Li}_2(x), \quad x \in (-1,1)
\end{aligned}$$

$\square$

a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^k \;=\; \frac{x}{(1-x)^2}\,, \qquad x \in (-1,1),$$

durch gliedweise Differentiation von

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}\,. \tag{1}$$

b) Allgemeiner: Leiten Sie einen Rekursionsformel für

$$S_m(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^m x^k \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

her. Werten Sie $S_m(x)$ für $m = 1$ und $m = 2$ aus.

---

a) Beidseitiges Differenzieren von (1) (Satz 14.3 !) + Multiplikation mit x $\rightsquigarrow$

$$x \cdot \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty} k\,x^{k-1} \;=\; \frac{x}{(1-x)^2} \qquad \checkmark$$

b) $m = 0$: geometrische Reihe

Rekursion $m \mapsto m+1$ mittels gliedweise Differentiation (Satz 14.3 !) :

$$S_m'(x) \;=\; \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty} k^m x^k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^m \frac{d}{dx} x^k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^{m+1} x^{k-1} \;=\; \frac{1}{x}\, S_{m+1}(x)$$

Also: $S_{m+1}(x) \;=\; x\, S_m'(x)$, mit $S_0(x) = \dfrac{1}{1-x}\,, \quad x \in (-1,1)$

- $m = 1$: $S_1(x) \;=\; x\, S_0'(x) \;=\; \dfrac{x}{(1-x)^2}$ (siehe **a)**)
- $m = 2$: $S_2(x) \;=\; x\, S_1'(x) \;=\; \dfrac{x\,(1+x)}{(1-x)^3}$
- usw.

$\square$

a) Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation des Graphen einer Funktion $f(x)$ um die x-Achse ($a \leq x \leq b$). Geben Sie eine Formel für das Volumen des Rotationskörpers an, und zwar in Form eines Integrals

$$\int_a^b r(x)\,dx\,.$$

Hinweis: Machen Sie eine Skizze und überlegen Sie, für welche Funktion r (in Abhängigkeit von f) die Riemann-Summen von r gegen das gesuchte Volumen konvergieren. So erhalten Sie die gesuchte Formel. Einfacher ausgedrückt: Man stellt sich vor, dass sich der Rotationskörper aus 'unendlich vielen, unendlich dünnen Kreisscheiben' zusammensetzt.

b) Ein etwas zerquetschter Faschingskrapfen entsteht durch Rotation der Kurve $y = \cos x$ um die x-Achse ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$). Berechnen Sie sein Volumen.

---

a) [**Skizze!**] Betrachte Riemann-Summe $\sum_i \Delta_i\, r(\xi_i)$ für die Funktion

$$r(x) \;:=\; \pi\, f(x)^2\,,$$

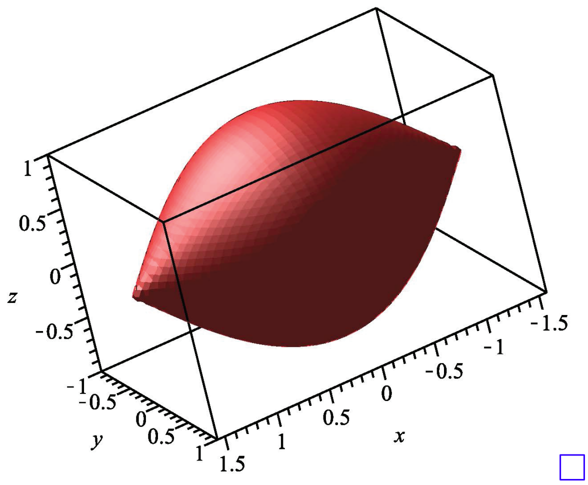
und interpretiere die Riemann-Summe als aufsummiertes Volumen von Kreisscheiben mit Dicke Δ_i und Radius $f(\xi_i)$.

Mit $f(x)$ ist auch $r(x)$ integrierbar, und Grenzübergang wie beim Riemann-Integral ergibt das Volumen des Rotationskörpers:

$$V \;=\; \pi \int_a^b f(x)^2\,dx\,.$$

b) Krapfenvolumen:

$$V \;=\; \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx \;=\; \frac{\pi^2}{2}\,.$$



$\square$