

Schriftliche Ausarbeitungen der Übungsaufgaben werden jeweils nach der Übungsstunde auf der Homepage der LVA veröffentlicht. Deren Studium (im nachhinein) ist aber weder ein Ersatz für die eigenständige Auseinandersetzung mit dem Stoff (im vorhinein) noch für den Besuch der Übungsstunde.

Es gibt drei Typen von Aufgaben:

- ‘Normale’ Aufgaben (ohne (*)) bzw. Unterpunkte davon haben etwa den Charakter von möglichen Testaufgaben. (D.h., tatsächliche Testaufgaben sind ähnlich; sie werden in Umfang und Schwierigkeitsgrad an die zur Verfügung stehende Arbeitszeit angepasst.)
- (*) Aufgaben mit (*) dienen der Vertiefung und können ggf. auch etwas schwieriger sein. Auch wenn es sich um keine typischen Testaufgaben handelt, ist die Beschäftigung damit nützlich für das aktive Erarbeiten des relevanten Stoffes.
- (**) Kommt manchmal vor. Nicht testrelevant, behandelt stoffliche Erweiterungen, mit ausreichenden Hinweisen für die Lösung.

1. Wie lautet die logische Negation der folgenden (wahren) Aussage?

*Jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade,
und keine natürliche Zahl ist sowohl gerade als auch ungerade.*

Drücken Sie die gegebene Aussage auch in der Sprache der formalen Logik aus (unter Verwendung von $\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg$).

Anmerkung: ‘ n gerade’ drückt man formelmäßig aus als $n \bmod 2 = 0$, wobei $n \bmod m$ (‘modulo’) = Rest bei Division von n durch m .

2. Beweisen Sie die Ungleichungen

a) $xy \leq \frac{1}{2}(\delta x^2 + \delta^{-1} y^2) \quad (\delta > 0 \text{ beliebig}),$

b) $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

c) $x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

für beliebige $0 \leq x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

3. Geben Sie einfache Formelausdrücke an (in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$) für die Werte der Summen

a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad \text{b) } \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k 2^i.$

4. (*) Beweisen Sie

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{1-4k^2} = \frac{n+1}{2n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Hinweis: Der Induktionsschluss erfordert ein wenig Rechenarbeit.

5. Zeigen Sie:

$$(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Binomischer Lehrsatz.

6. (*)

a) Gesucht ist eine Funktion $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, die der folgenden ‘Differenzengleichung’ genügt:

$$f(n+1) - f(n) = n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Geben Sie alle möglichen Lösungsfunktionen $f(n)$ an.

b) Gleiche Frage wie unter a), wobei $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

$$f(n-1) - 2f(n) + f(n+1) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

7. a) Geben Sie für die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} : n^2 - 6n + 5 < n\}$$

eine explizite Darstellung an.

b) Ist die Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$f(n) := n^2 - 2n + 5$$

- wohldefiniert?
- injektiv?
- surjektiv?

8. a) Welche Zahl wird durch die *binäre* Darstellung $0.\overline{1}$ repräsentiert?

b) Wandeln Sie die Dezimalzahl 0.1 in Binärdarstellung um.

Hinweis: Division in Binärarithmetik. (Ungewohnt, funktioniert jedoch analog wie in Dezimalarithmetik.)

c) Zeigen Sie: Jede endliche Binärzahl besitzt eine endliche Dezimaldarstellung. (Die Umkehrung gilt nicht; siehe b).)

9. a) Gesucht ist eine bijektive Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die streng monoton fallend ist, d.h. $f(n+1) < f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie ein derartige Funktion an oder zeigen Sie, dass sie nicht existieren kann.

b) Gleiche Frage wie unter a), für $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

c) (*) Konstruieren Sie eine bijektive Funktion $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0^k$ ($k \in \mathbb{N}$). Sie müssen die Funktion nicht explizit formelmäßig angeben; beschreiben Sie, wie die Konstruktion funktioniert.

Anmerkung zur Notation: $A^k = A \times A \times \dots \times A = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in A\}$.

10. Ein Anwendungsproblem:

Für zwei in Serie bzw. parallel geschaltete elektrische Widerstände R_1 und R_2 ergibt sich der Gesamtwiderstand

$$R_{\text{gesamt}} = R_1 + R_2 \quad (\text{bei Serienschaltung}), \quad R_{\text{gesamt}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (\text{bei Parallelschaltung}).$$

Folgern Sie daraus, dass die analogen Formeln für n in Serie bzw. parallel geschaltete Widerstände ($n \geq 2$) wie folgt lauten:

$$R_{\text{gesamt}} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (\text{bei Serienschaltung}), \quad R_{\text{gesamt}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} \quad (\text{bei Parallelschaltung}).$$

1. Zeigen Sie:

- a) Das Intervall $(0, 1)$ hat dieselbe Mächtigkeit wie ein beliebiges Intervall (a, b) , wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Hinweis: Finden Sie eine bijektive Abbildung zwischen $(0, 1)$ und (a, b) .

(*) Lassen Sie auch $a = 0$, $b = \infty$ als Grenzfall zu ($(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$). Die naheliegende Bijektion für den Fall $a, b \in \mathbb{R}$ lässt sich jedoch nicht auf diesen Grenzfall übertragen. (Ähnlich funktioniert es für (a, ∞) , $(-\infty, b)$ und $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.)

- b) (*) Die Potenzmenge $P(X)$ einer beliebigen nichtleeren Menge X hat dieselbe Mächtigkeit wie die Menge aller Funktionen χ des Typs $\chi: X \rightarrow \{0, 1\}$.

Hinweis: Die sogenannte *charakteristische Funktion* einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist definiert durch

$$\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) := \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A. \end{cases}$$

- c) Für eine endliche Menge X mit n Elementen gilt $|P(X)| = 2^n$.

Anmerkung: Die Mächtigkeit einer Menge A bezeichnet man mit $|A|$.

2. Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich und den Bildbereich der folgenden Funktionen, so dass diese wohldefiniert und bijektiv sind:

a) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

c) $f: D \subseteq \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$
 $x \mapsto 5x - 4$

b) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 |x|$

d) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3+2x}{1-x}$

3. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \sqrt{2-x^2}$ und $g(x) = \frac{1}{1-x}$.

- a) Bestimmen Sie die maximalen reellen Definitionsbereiche von f und g .
 b) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ zusammen mit ihren maximalen reellen Definitionsbereichen.
 c) Bestimmen Sie die Abbildungen $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, \dots , $g \circ g$, $g \circ g \circ g$, \dots . Was fällt Ihnen auf?

4. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und M eine Teilmenge von Y . Mit $f^{-1}(M)$ bezeichnet man das *Urbild* von M unter der Funktion f , d.h. die Menge¹

$$f^{-1}(M) := \{x \in X : f(x) \in M\}.$$

Zeigen Sie:

- a) f ist genau dann injektiv wenn $f^{-1}(f(A)) = A$ für jedes $A \subseteq X$.
 b) f ist genau dann surjektiv wenn $f(f^{-1}(B)) = B$ für jedes $B \subseteq Y$.

Anmerkung: f ist also genau dann bijektiv, wenn

$$f^{-1}(f(A)) = A \quad \wedge \quad f(f^{-1}(B)) = B$$

für jedes $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ zutrifft.

5. Gegeben sei die Folge $\{a_n\}_{n=2}^\infty$ mit $a_n = \frac{n-2}{n+1}$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - 1| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt, für a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, b) $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

¹ $f^{-1}(M)$ ist immer wohldefiniert, auch wenn f nicht bijektiv ist. Falls f bijektiv ist, dann gilt $f^{-1}(M) = \{f^{-1}(y) : y \in M\}$ mit der Umkehrfunktion f^{-1} .

6. Untersuchen Sie die Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränktheit. Berechnen Sie auch die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, falls sie existieren.

a) $x_n = \frac{1 - n + n^2}{n + 1}$ b) (*) $x_n = \frac{1 - n + n^2}{n(n + 1)}$ c) $x_n = \frac{1}{1 + (-2)^n}$ d) (*) $x_n = \sqrt{1 + \frac{n + 1}{n}}$

7. Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Eine Folge konvergiert, falls sie monoton und beschränkt ist.
b) Eine konvergente Folge ist monoton und beschränkt.
c) Wenn eine Folge nicht monoton ist, konvergiert sie nicht.
d) Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, konvergiert sie nicht.
e) Für eine durch ein rekursives Gesetz der Form $a_n := f(a_{n-1})$ (mit vorgegebenem 'Startwert' a_1) definierte Folge bezeichnet man die Gleichung $a = f(a)$ als die zugehörige Fixpunktgleichung. (Dabei ist f eine gegebene Funktion.)

(**) Behauptung: Wenn es Lösungen a zur Fixpunktgleichung einer rekursiv definierten konvergenten Folge gibt, so konvergiert die Folge gegen einen dieser Werte a .

Welche Eigenschaft muss für f an einer derartigen Stelle a gelten, damit die Aussage richtig ist? Kommt Ihnen diese Eigenschaft bekannt vor?

Anmerkung: Vgl. Aufgabe 8 und Kapitel 6 aus dem VO-Skriptum.

8. a) (*) Beweisen Sie: Die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}, \quad n \geq 1,$$

ist konvergent. Bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Folge monoton wachsend und durch $c = 2$ beschränkt ist, und nehmen Sie dann Bezug auf die Lösung von Aufgabe 7e).

- b) Sei $m \in \mathbb{N}$ fest und $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$. Die Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$b_n := \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} a_{n+k}.$$

Zeigen Sie: $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a .

9. Seien $a, b, p > 0$ positive reelle Zahlen. Der Mittelwert vom Grad p von a und b ist definiert als

$$S_p(a, b) := \left(\frac{a^p + b^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} = S_p(b, a).$$

Für $p = 1$ erhalten wir insbesondere das arithmetische Mittel von a und b , für $p = 2$ das sogenannte quadratische Mittel. Natürlich gilt $S_p(a, a) = a$ für alle p .

- a) Zeigen Sie

$$S_p(a, b) \in (a, b) \quad \text{für } a < b.$$

- b) (**) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$S_\infty(a, b) := \lim_{p \rightarrow \infty} S_p(a, b)$$

Hinweis: Überlegen Sie, wie ein derartiger Grenzwert wohl definiert ist. Zum Beweis bringen Sie das Verhältnis $\frac{a}{b}$ von a und b ins Spiel und verwenden das Einschließungsprinzip.

10. Zeigen Sie

$$\frac{1 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} \rightarrow \frac{1}{4}$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die (etwas kurios anmutende) Identität $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$.

1. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 := q, \quad a_n := p a_{n-1} + q, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

mit $p \geq 0$ und $q \in \mathbb{R}$. Interpretation: Zunahme bzw. Abnahme einer Population a_n um einen Faktor p von Zeitpunkt zu Zeitpunkt, korrigiert um q (Zuwanderung oder Abwanderung) in jedem Schritt. (Der Fall $p = 0$ ist trivial.)

a) Leiten Sie eine explizite Formel für die a_n her.

b) Berechnen Sie den ‘asymptotischen Zustand’ $a_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

– unter Verwendung der Lösungsdarstellung aus a),

– unter direkter Verwendung der rekursiven Definition der a_n ,

für diejenigen Werte von p , für die der Limes a_∞ existiert. (Welche Werte sind das?)

2. Fortsetzung von Aufgabe 1: Sei nun p so vorausgesetzt, dass in 1b) Konvergenz vorliegt.

Wir betrachten die allgemeinere Rekursion

$$a_0 := q_0, \quad a_n := p a_{n-1} + q_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

mit einer gegebenen Folge $\{q_n\}$.

a) Geben Sie eine explizite Formel für die a_n an (Darstellung als Summe).

b) Sei $q_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (Zuwanderung). Wir fragen: Bleibt die Population a_n beschränkt für $n \rightarrow \infty$? Geben Sie eine Bedingung an die Folge $\{q_n\}$ an, die dafür hinreichend ist, und geben Sie für diesen Fall eine Schranke A an, so dass $a_n \leq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) (*) Die Frage der Konvergenz der Folge $\{a_n\}$ lässt sich hier nicht allgemein beantworten, da dies vom genauen Verhalten der q_n abhängt. Betrachten Sie den Fall $q_n = 2^{-n}$ (exponentiell abnehmende Zuwanderung). Zeigen Sie: Die Population a_n stirbt aus für $n \rightarrow \infty$. (Beachten Sie: $p = \frac{1}{2}$ ist ein Sonderfall.)

3. Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} \right)$$

konvergent? ($n_0 > \max\{|a|, |b|\}$ hinreichend groß angenommen, so dass Summanden wohldefiniert.)

4. Entscheiden Sie, ob bzw. für welche Werte von x (in b)) die folgenden Reihen bedingt bzw. absolut konvergieren:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \quad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{c) } 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{d) } 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{4}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}} \right)}{2k+1}$$

– Freiwillige Zusatzaufgabe zu c), d) — dafür benötigt man ein kleines Computerprogramm (manuell am Taschenrechner auswerten ist zu mühsam):

Werten Sie für c) die Partialsummen der ersten 10, 20, 30, 40, ... Reihenglieder numerisch aus. Man sieht, gegen welchen Wert die Reihe offenbar konvergiert (beweisen können wir das hier – noch – nicht). Geben Sie eine Abschätzung für den Reihenrest der n -ten Partialsumme an.

Die Konvergenzgeschwindigkeit der Reihe c) ist sehr bescheiden. Werten Sie auch für die lustige Reihe d) die n -ten Partialsummen aus für $n = 1, 2, 3, \dots$. Was beobachten Sie?

5. Zeigen Sie: Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

6. Sei $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Entscheiden Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die sogenannte *binomische Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{c}{n} x^n$$

absolut konvergiert.

Hinweis: $\binom{c}{n} := \frac{c(c-1) \cdots (c-n+1)}{n!}$ ist der verallgemeinerte Binomialkoeffizient (mit $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$).

7. Gegeben seien die Folgen $(a_k) = (p^k)$ und $(b_k) = (q^k)$, wobei $|p| < 1$ und $|q| < 1$. Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sind konvergente geometrische Reihen.

a) Bestimmen Sie den Wert der zugehörigen Cauchy'schen Produktreihe.

b) (*) Welcher Sonderfall tritt hier auf? Diskutieren Sie diesen separat.

8. Neben den in der VO besprochenen Kriterien für die Konvergenz von Reihen gibt es auch weitere Kriterien, z.B. das sogenannte *Verdichtungskriterium*:

Ist $\{a_n\}$ eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

konvergiert.

Verwenden Sie dieses Kriterium, um zu zeigen, dass die verallgemeinerte harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert.

9. Ein punktförmiges Tierchen namens Bello startet im linken unteren Eck eines gleichseitigen Dreiecks Δ mit Seitenlänge a m und krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit v m/s geradlinig auf den Mittelpunkt der gegenüber liegenden Seite zu. Dann kehrt es um und krabbelt mit Geschwindigkeit v waagrecht bis zur linken Kante zurück. Dann wiederholt sich dieser Vorgang 'unendlich oft', wobei sich Bellos Geschwindigkeit in der n -ten Iteration auf v/n^p verlangsamt, mit $p \in \mathbb{N}$. Im Limes landet Bello in der oberen Ecke von Δ .

a) Einen wie langen Weg legt Bello insgesamt zurück?

b) Erreicht er sein Ziel in endlicher Zeit, bzw. hängt dies von p ab?

(Machen Sie eine Skizze.)

10. Gegeben sei die Funktion $f: (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+p(x)} - 1}{x^2},$$

wobei $p(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ ein gegebenes Polynom ist mit $p(0) = 0$.

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ ist wohldefiniert für hinreichend kleines $\delta > 0$.

b) Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck ' $f(0) = 0/0$ '. Untersuchen Sie, für welche Polynome p an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vorliegt. Falls dies zutrifft, geben Sie den Wert der stetigen Fortsetzung an, d.h. den Limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

In welcher Weise hängt dieser Limes von dem Polynom p ab?

1. Sei $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine stetige Funktion.

- a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ besitzt in $[a, b]$ mindestens einen *Fixpunkt* $x^* \in [a, b]$, d.h. $x^* \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $x^* = f(x^*)$.

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g(x) = x - f(x)$ an.

- b) f sei sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h. f ist eine sogenannte *Kontraktion*. Zeigen Sie: Der Fixpunkt x^* ist eindeutig. Geben Sie auch ein konkretes Beispiel an.

- c) Man kann x^* iterativ approximieren: Ausgehend von einem Startwert $x_0 \in [a, b]$ berechnet man

$$x_{i+1} := f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Diese *Fixpunktiteration* erzeugt eine Folge $\{x_i\}$. Zeigen Sie, dass diese gegen den Fixpunkt x^* konvergiert. Geben Sie auch eine Fehlerabschätzung der Form

$$|x_i - x^*| \leq C_i |x_0 - x^*| \tag{1}$$

an. Wie hängen die C_i von der Kontraktionsrate $L \in [0, 1)$ ab?

- d) (1) ist eine sogenannte *a priori - Fehlerabschätzung*. Sie sagt die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration in Abhängigkeit von L vorher. Eine numerisch auswertbare, sogenannte *a posteriori - Fehlerabschätzung* erhält man daraus mittels $|x_0 - x^*| \leq b - a$, sofern man die Kontraktionsrate L kennt. (Dies kann dazu benutzt werden, die Iteration zu steuern, d.h., abubrechen, sobald das gewünschte Genauigkeitsniveau erreicht ist.)

(*) Letztere Abschätzung ist zu pessimistisch, falls x_0 schon nahe an x^* liegt. Zeigen Sie, dass folgende verbesserte a-posteriori - Abschätzung gilt:

$$|x_i - x^*| \leq \frac{L^i}{1 - L} |x_1 - x_0|. \tag{2}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$|x_i - x^*| \leq \frac{L}{1 - L} |x_i - x_{i-1}|.$$

2. Fortsetzung von Aufgabe 1:

Gesucht ist eine Lösung $x = x^* \in [0, 1]$ der Gleichung $x^3 + 4x - 1 = 0$. Dies ist äquivalent zur Lösung der Fixpunktgleichung

$$x = f(x), \quad f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]: \quad f(x) = \frac{1 - x^3}{4}.$$

- a) Zeigen Sie: Die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ist eine Kontraktion.
- b) Führen Sie einige Schritte der Fixpunktiteration am Rechner aus, z.B. ausgehend von $x_0 := \frac{1}{2}$, und vergleichen Sie die echten Fehler $x_i - x^*$ mit der Abschätzung (2).

Anmerkung: Die exakte Lösung ist $x^* = \frac{c}{6} - \frac{8}{c}$ mit $c = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{849}}$; $x^* \approx 0.246266\dots$

3. Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{(x-1)^2}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + ax + 8}{x^2 - 4}$

4. a) Sei $f: I \rightarrow J$ eine auf einem Intervall I definierte stetige und bijektive Funktion (das Bild $J = f(I)$ ist auch ein Intervall). Geben Sie eine Bedingung an f an, so dass $f^{-1}: J \rightarrow I$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitzkonstante K . (Stellen Sie sich das Ganze auch anschaulich anhand einer Skizze vor.)
- b) Seien f und g zwei Lipschitz-stetige Funktionen. Bestimmen Sie je eine Lipschitzkonstante für $f \circ g$ und $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ mal}}$.
- c) Seien f und g zwei beschränkte Lipschitz-stetige Funktionen. Bestimmen Sie eine Lipschitzkonstante für die Produktfunktion $f \cdot g$.
5. a) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \frac{x^n - c^n}{x - c}$$

sich an $x = c$ stetig fortsetzen lässt, und berechnen Sie den Wert der stetigen Fortsetzung dieser Stelle.

- b) Analog wie a), für

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x},$$

stetige Fortsetzung an $c = 0$. Geben Sie auch die Umkehrfunktion von $f: [0, 1] \rightarrow f([0, 1])$ an und machen Sie eine Skizze.

- c) Sei f Lipschitz-stetig. Kann man zeigen, dass dann die Funktion

$$g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

an $x = c$ stetig fortsetzbar ist? (Versuchen Sie es.) Welchen Wert hat die stetige Fortsetzung an $x = c$ (falls sie existiert)?

6. Die Funktion $\text{Li}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$ nennt man den *Polylogarithmus* vom Grad k . (Für $k = 1$ erhält man den gewöhnlichen natürlichen Logarithmus $\ln x$.)

- a) Zeigen Sie, dass $\text{Li}_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ (der Trilogarithmus) auf $[0, 1]$ wohldefiniert und Lipschitz-stetig ist. Bestimmen Sie die Lipschitzkonstante L .
- b) Zeigen Sie, dass $\text{Li}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (der Dilogarithmus) auf $[0, 1]$ wohldefiniert ist und für beliebige $\varepsilon \in (0, 1)$ auf $[0, 1 - \varepsilon]$ Lipschitz-stetig ist. Bestimmen Sie die Lipschitzkonstante $L = L(\varepsilon)$.

Zusatzfrage: Was meinen Sie: Wie verhält sich $\text{Li}_2(x)$ in der Nähe der Stelle $x = 1$ (mit $\text{Li}_2(1) = \pi^2/6$)?

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Folge von Lipschitzkonstanten $L = L_n$ für die Funktionen $x^n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

7. Wir betrachten einen senkrecht hüpfenden (punktförmigen) Ball.¹ Die Höhe des Balles zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $y = h(t)$. Die Bewegung des Balles beschleunige sich in folgender Weise:

Start bei $y(0) = 0$.

Für $t \in (0, \frac{1}{4})$ bewegt sich der Ball vom Boden, also $y = 0$, auf Höhe $y = 1$.

Für $t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ bewegt sich der Ball wieder zurück zu $y = 0$.

Für $t \in (\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$ bewegt sich der Ball zurück zu $y = 1$.

Für $t \in (\frac{5}{8}, \frac{3}{4})$ bewegt sich der Ball wieder zu $y = 0$.

Für $t \in (\frac{3}{4}, \frac{13}{16})$...

usw. Jede der Teilstrecken wird mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, und diese verdoppelt sich von Schritt zu Schritt.

Skizzieren Sie die Funktion $h(t)$. Ist $h(t)$ linksseitig stetig fortsetzbar an der Stelle $t = 1$?

8. Funktionen können auch *implizit* definiert sein, d.h. als Lösung einer parameterabhängigen Gleichung. Betrachten Sie die Gleichung

$$\frac{y-1}{x+1} = 1 - xy$$

für die Unbekannte y in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$. Durch ihre Lösung ist eine Funktion $y = f(x)$ definiert. Wie lautet diese? Ist sie wohldefiniert und stetig für alle $x \in \mathbb{R}$?

Besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = -1$. Was ist $f(-1)$?

9. Funktionen können auch in *rekursiver* Weise definiert sein. Betrachten Sie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ f(\frac{x}{2}), & x > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion wohldefiniert ist. Wo ist sie stetig, und wie lauten die Unstetigkeitsstellen und ihr Typ? Skizzieren Sie auch den Grafen ;-) von f .

10. Finden Sie Folgen $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$, so dass

$$\delta_n(x) := \frac{a_n}{b_n + c_n x^2} \geq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$ nennt man *Dirac-Funktion* oder auch Dirac'sche Delta-Distribution, und eine Folge, die gegen die Dirac-Funktion konvergiert, nennt man eine Dirac-Folge. Man beachte, dass $\delta(x)$ keine Funktion im gewöhnlichen Sinn ist.

¹ Das Beispiel ist konstruiert und entspricht nicht einer physikalischen Realität.

1. Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren:

a) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

b) $x^3 - x^2 - c^2x + c^2$, $c \in \mathbb{R}$

Für welche Werte von c treten mehrfache Nullstellen (doppelt oder dreifach) auf?

c) $x^{10} - 5cx^8 + 10c^2x^6 - 10c^3x^4 + 5c^4x^2 - c^5$, $c \geq 0$

Welcher Wert von c ergibt einen Sonderfall?

2. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

a) $\frac{2x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}$

b) $\frac{1+x}{x^2-y^2}$: Zunächst PBZ bezüglich der Variablen x , wobei $y \in \mathbb{R}$ als fester Parameter angesehen wird, danach mit vertauschten Rollen. Achten Sie auf Sonderfälle.

c) $\frac{x}{x^3 - x^2 - c^2x + c^2}$, $c \in \mathbb{R}$: Berücksichtigen Sie Sonderfälle (spezielle Werte von c).

3. Bestimmen Sie das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i), i = 0 \dots 3\}$:

a) $\{(-3, +1), (-1, +1), (+1, +1), (+3, +1)\}$

b) $\{(-3, +2), (-1, +1), (+1, +1), (+3, +2)\}$

c) $\{(-3, -2), (-1, -1), (+1, +1), (+3, +2)\}$

d) $\{(-3, -1), (-1, -1), (+1, +1), (+3, +2)\}$

Diese Aufgabe löst man sinnvollerweise am Computer.

4. a) Herr P. Olynom rechnet gerne mit Polynomen. Er sucht nun nach speziellen, nämlich nach auf ganz \mathbb{R} strikt monoton wachsenden Polynomen. Geben Sie eine naheliegende Klasse derartiger Polynome vom Maximalgrad $n \in \mathbb{N}$ an.

b) Gegeben sei das quadratische Polynom $p(x) = x(x-1)$, $x \geq 0$. Geben Sie $\xi > 0$ so an, dass p auf $[\xi, \infty)$ strikt monoton wachsend ist.

Anmerkung: Mittels Differentialrechnung geht das sehr einfach. Sie sollen hier jedoch direkt ausgehend von der Definition der Monotonie argumentieren.

Hinweis: Schreiben Sie $p(y) - p(x)$ in der Form $(\dots)(y-x)$. Warum ist a priori klar, dass das möglich ist?

c) Sei f monoton wachsend und g monoton fallend. Welches Monotonieverhalten haben die Funktionen $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ und $g \circ g$?

5. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = (1+x)^{1/x}$, $x > 0$.

a) Liegt an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vor, d.h. existiert der Grenzwert

$$f(0) := \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad ?$$

Falls ja – wie lautet sein Wert? Wenn Sie das naheliegende Argument gefunden haben, überlegen Sie, ob dies wirklich rigoros ist.

b) Angenommen, Sie kennen den Wert des Limes nicht, Sie wollen ihn aber berechnen bzw. approximieren. Vorschlag (Rechner verwenden): Interpolieren Sie f an den Stellen $x = 0.01, 0.02, 0.03$ durch ein Polynom $p(x)$ vom Grad 2, und verwenden Sie $p(0)$ als Approximation für $f(0)$. Wie genau ist diese Approximation?

Anmerkung: Man kann auch andere Auswertungsstellen und ein Polynom höheren Grades verwenden. Um zu beurteilen, welche Genauigkeit man mit welcher Variante erwarten kann, benötigt man etwas Approximationstheorie, die wir hier nicht behandeln.

Haben Sie eine Idee, wie man die Approximation einfacher bewerkstelligen könnte?

6. a) Eine zeitabhängige Größe $X = X(t)$ gehorche dem Gesetz $X(t) = C e^{\lambda t}$, $t \geq 0$, mit $C = X(0) > 0$ und der Abklingrate $\lambda < 0$. (Beispiel: Radioaktiver Zerfall. Falls wir z.B. die Zeit in Stunden [h] messen, dann hat λ die Dimension ‘pro Stunde’, also $[\text{h}^{-1}]$.)

Der Anfangswert C und die Abklingrate λ seien unbekannt, aber bekannt sind Messwerte $0 < X_1 = X(t_1)$ und $0 < X_2 = X(t_2) < X_1$ zu zwei Zeitpunkten $t_2 > t_1 > 0$. Geben Sie Formelausdrücke an (in Abhängigkeit von t_1, t_2, X_1, X_2) für die Werte von C und λ . Stellen Sie C in der Form $C = X_1^{\gamma_1} X_2^{\gamma_2}$ dar, mit geeigneten γ_1, γ_2 .

- b) Es gelte $X(t) = C e^{\lambda t}$, mit $C = X(0)$ und bekanntem $\lambda < 0$. Zu welchem Zeitpunkt t fällt der Wert $X(t)$ auf das 10^n -fache ab im Vergleich zu $X(0)$ ($n \in \mathbb{N}$)?
- c) Licht, das in eine Schicht aus Glas eintritt, wird in exponentieller Weise abgeschwächt (Absorption), d.h., es gilt ein Abschwächungsgesetz analog zum Zerfallsgesetz aus a), b). Für ein konkretes Material (Glas) wird gemessen, dass die Intensität des Lichtes pro zurückgelegtem Millimeter um 1% abnimmt. Um welchen Faktor wird dann die Intensität des Lichtes durch eine 5 cm dicke Glasscheibe abgeschwächt?

7. Skizzieren Sie die Funktionen

- a) $f(x) = e^{\alpha x} \sin x$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- b) $f(x) = e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- c) $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$

und bestimme Nullstellen und Unendlichkeitsstellen.

8. a) Geben Sie für den Wert von $\sum_{k=1}^n \ln(k^m)$ einen möglichst einfachen Formelausdruck an ($m, n \in \mathbb{N}$).
- b) Sei $W(x)$ definiert als die Umkehrfunktion von $f(x) = x e^x$, $x \geq 0$. Diese ist nicht in elementarer Weise darstellbar aber wohldefiniert, und wir nehmen sie als neue Funktion in unseren Zoo von Standardfunktionen auf.¹
- (i) Drücken Sie eindeutige Lösung der Gleichung $x = e^{-x}$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.
- (ii) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x^2 = e^{-x}$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

9. a) Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\omega \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

in der Form

$$f(t) = A \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{bzw.} \quad f(t) = A \cos(\omega t - \psi)$$

mit passenden $A \geq 0$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. Geben Sie explizit an, wie die *Amplitude* A und die *Phasenverschiebung* φ bzw. ψ mit a und b zusammenhängen.

- b) Zeigen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für den Kosinus:

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (\cos(2\alpha) + \cos(2\beta)).$$

10. a) Zeigen Sie

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \left(\frac{x+y}{1-xy} \right)$$

Hinweis: Man geht vom Tangens aus, siehe VO, Abschnitt 8.5.

- b) Spielen Sie ein bisschen damit, um zu zeigen

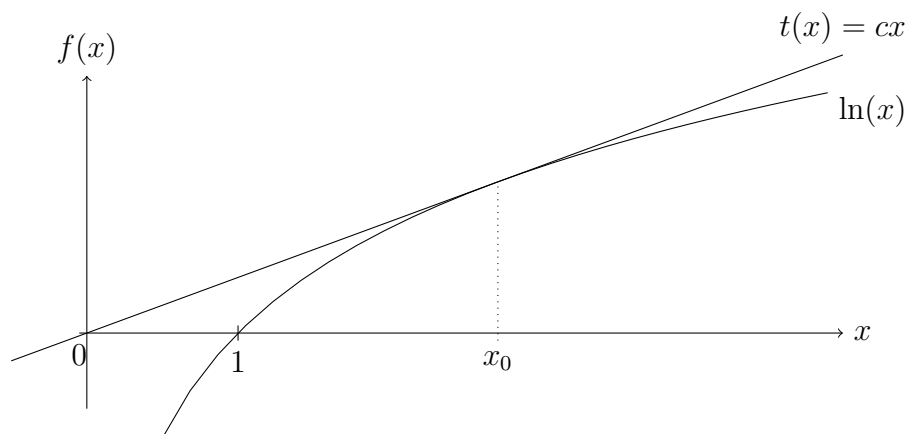
$$4 \arctan \left(\frac{1}{5} \right) - \arctan \left(\frac{1}{239} \right) = \frac{\pi}{4}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Wert von $4 \arctan \left(\frac{1}{5} \right)$ mit Hilfe von a).

Anmerkung: Die Identität b) wurde in UE 3, Aufgabe 4 d) dazu verwendet, um eine rasch konvergente Reihenentwicklung für $\frac{\pi}{4}$ zu gewinnen, und zwar mittels der Potenzreihenentwicklung von $\arctan x$. Mehr darüber in der VO, Kapitel 13, und in der UE 8.

¹ Viele wichtige Funktionen der mathematischen Physik sind nicht elementar und als Umkehrfunktionen oder über Integrale etc. definiert. Für die rechnerische Praxis besteht kein wesentlicher Unterschied, weil alle diese Funktionen – inklusive der elementaren Funktionen – am Computer numerisch approximiert werden müssen.

1. a) Seien f und g zweimal differenzierbare Funktionen, $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Berechnen Sie $\frac{d^2}{dx^2} f(g(x))$.
 b) Berechnen Sie $\frac{d^n}{dx^n} (\sin x \cos x)$ mittels der Leibniz'schen Produktregel. Überlegen Sie sich auch einen einfacheren und schnelleren Weg, diese Ableitung zu berechnen.
 c) Finden Sie die Produktregel für $\frac{d}{dx} (f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x))$ und beweisen sie diese mittels vollständiger Induktion.
2. a) Bestimmen Sie c und x_0 so, dass $t(x) = cx$ die Tangente an den Graphen von $f(x) = \ln(x)$



an der Stelle x_0 ist.

- b) Für welche $c > 0$ ist $f(x) = \ln(x)$ auf (c, ∞) eine Kontraktion (Lipschitzkonstante < 1)?
 c) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes: $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ für alle $x > -1$
 d) Sei $f(x) = x^3 - 3x + 4$. Bestimmen Sie ein $\xi \in (a, b) = (1, 2)$ so, dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ gilt.
3. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mithilfe der Regel von de l'Hospital:
 - a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (vgl. UE 5, Aufgabe 5)
 - c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$
 - d) (*) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{\beta^x}$ Wie sind α und β zu wählen, damit der Limes existiert?
4. a) Wie stark ändert sich in erster Näherung die Fläche eines Kreises bzw. einer Kugel, wenn der Radius r um Δr vergrößert wird?
Hinweis: Das Volumen der Kugel beträgt $V = \frac{4\pi}{3} r^3$.
 b) Die Bahnkurve eines Geschosses, das vom Punkt $(0, 0)$ mit vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α abgeschossen wird, wird durch die Parabelgleichung

$$y(x) = \tan \alpha \cdot x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

beschrieben, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Aus der Gleichung folgt, dass man ein Ziel $(x_0, 0)$ entlang zweier Bahnen erreichen kann, und zwar mit den Winkeln α_0 und $\frac{\pi}{2} - \alpha_0$. Berechnen Sie aus obiger Gleichung die Reichweite des Geschosses x_0 und weiters x_0 als Funktion des Winkels α_0 . Untersuchen Sie, ob für einen der beiden Winkel der Zielpunkt $(x_0, 0)$ empfindlicher auf Ungenauigkeiten in der Einstellung des Winkels reagiert als für den anderen.

Zusatzfrage: Durch welche Funktion wird die Höhe y in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben? Zeigen Sie, dass für diese Funktion $y(t)$ gilt $\ddot{y}(t) \equiv -g$.

Hinweis: In x -Richtung wirkt keine Kraft, daher gilt für die Funktion $x(t)$: $\ddot{x}(t) \equiv 0$
Wie lautet $x(t)$?

5. Berechnen Sie jeweils die Ableitung der Umkehrfunktion mittels Rechenregel 9.10 im Skriptum:

a) $f(x) = \tan(x)$, $f^{-1}(y) = \arctan y$

b) (*) $g(x) = x e^x$, $g^{-1}(y) = W(y)$... Lambert W-Funktion (vgl. UE 5, Aufgabe 8b)).

Hinweis: Drücken Sie $W'(y)$ mittels $W(y)$ aus.

6. a) Finden Sie vier verschiedene elementare Funktionen $u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x)$, die der Differentialgleichung

$$\frac{d^4 u(x)}{dx^4} = u^{IV}(x) = c^4 u(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

genügen.

Anmerkung: Diese Funktionen sind *linear unabhängig*, d.h., falls $a_1 u_1(x) + \dots + a_4 u_4(x) = 0$ für alle x , dann ist $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. (Siehe dazu 'Praktische Mathematik I', Kapitel 5.)

b) Zeigen Sie, dass jede Linearkombination der Funktionen $u_i(x)$ aus a) ebenfalls eine Lösung ist.

Anmerkung: Man kann zeigen, dass dies alle Lösungen ergibt. Um die Lösung eindeutig festzulegen, werden zusätzlich vier Anfangs- oder Randwerte, z.B. $u(0) = u_0$, $u(1) = u_1$, $u'(0) = u_3$, $u'(1) = u_4$ benötigt.

Anwendung: Eine Differentialgleichung dieses Typs beschreibt z.B. die Biegelinie eines elastisch verformbaren eingespannten Balkens.

c) Betrachten Sie $v_1(x), v_2(x), v_3(x), v_4(x)$ mit

$$v_1'(x) = v_2(x)$$

$$v_2'(x) = v_3(x)$$

$$v_3'(x) = v_4(x)$$

$$v_4'(x) = c^4 v_1(x)$$

Zeigen Sie, dass v_1 Lösung von $u^{IV}(x) = c^4 u(x)$ ist.

Anmerkung: In 'Lineare Algebra' lernt man, wie man derartige (und allgemeinere) 'Lineare Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten' systematisch löst.

7. a) Sei

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0, \\ x + x^2 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Ist f stetig? Ist f stetig differenzierbar? Ist f zweimal stetig differenzierbar? Berechnen Sie die Ableitungen dort wo sie existieren. Was fällt Ihnen auf?

b) Sei

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist und dass $f'(0) > 0$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass es kein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Was bedeutet das? (Ein ähnliches Beispiel wurde in der VO besprochen.)

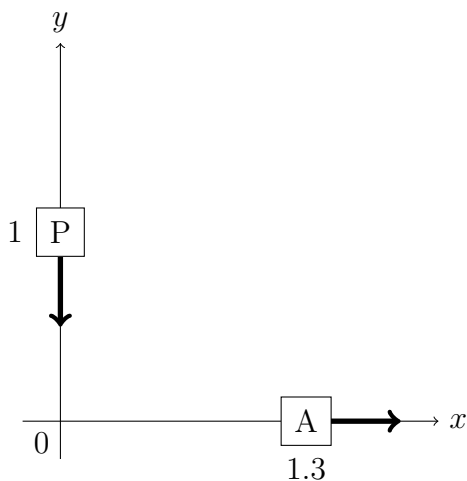
8. a) Seien f und g zwei auf \mathbb{R} differenzierbare Funktionen mit $f(0) = g(0)$ und $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- b) Verwenden Sie a), um das Additionstheorem für den Cosinus auf das Additionstheorem für den Sinus zurückzuführen.
- c) Verwenden Sie a), um das Additionstheorem für den Arcustangens nachzuweisen (siehe UE 5, Aufgabe 10).
- d) (*) Verwenden Sie a) dazu, um den Binomischen Lehrsatz induktiv zu beweisen.
- Hinweis:* Differenzieren Sie jeweils die linke und die rechte Seite.

9. Gegeben ist die Funktion

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+c}\right), \quad c > 0.$$

- a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D von g in Abhängigkeit von c .
Liegt für $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vor?
- b) Untersuchen Sie mittels der Ableitung, für welche $x \in D$ die Funktion g strikt monoton wachsend ist.
- c) Geben Sie für den Fall $c = 2$ die Gleichung der Tangente an der positiven Nullstelle der Funktion g an, d.h. an der Stelle $(x_0, g(x_0))$ mit $x_0 > 0$ und $g(x_0) = 0$.
10. (*) Ein Streifenwagen der Polizei (P) verfolgt ein davonjagendes Auto (A) und nähert sich von Norden her einer rechtwinkligen Kreuzung. Das verfolgte Auto ist in der Kreuzung abgebogen und bewegt sich nun genau nach Osten. Als der Streifenwagen 1 km nördlich der Kreuzung und das Auto 1.3 km östlich der Kreuzung ist, stellt die Polizei per Radar fest, dass der Abstand der beiden Autos um 32 km/h zunimmt. Der Streifenwagen fährt in diesem Moment 100 km/h. Wie groß ist die Geschwindigkeit des verfolgten Autos in diesem Moment?

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen $P(t)$ und $A(t)$, die die Bewegungen des Streifenwagens und des verfolgten Autos entlang der vertikalen bzw. der horizontalen Achse beschreiben, d.h. deren Abstand von der Kreuzung in Abhängigkeit von der Zeit t . Betrachten Sie weiters die Funktion $D(t)$, die den Abstand der beiden Autos in der Ebene beschreibt. (t ist die Zeit in Stunden, $P(t)$, $A(t)$ und $D(t)$ haben km-Werte.) Gesucht ist $\dot{A}(t)$ zum Zeitpunkt der Radarpeilung. (Werten Sie das zum Schluss am Rechner aus).



Frohe Weihnachten und alles Gute für das Jahr 2014!

Zitate beziehen sich auf das Vorlesungsskriptum, Edition 2013.

1. a) Zeigen Sie dass die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$f(x) = x^2 e^{1/x}$$

strikt konvex ist und dass sie eine eindeutige Minimalstelle $x = x_{\min}$ besitzt. Geben Sie x_{\min} und $f(x_{\min})$ an.

- b) Gleiche Frage wie unter a), für

$$f(x) = e^x e^{1/x}$$

2. a) Seien $x, y \geq 0$ und $p \geq 1$ reelle Zahlen. Beweisen Sie die Ungleichung

$$(x + y)^p \leq 2^{p-1} (x^p + y^p)$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion $f(\xi) = \xi^p$ konvex ist für $\xi \geq 0$, und nützen Sie dies aus.

- b) (*) Für den Spezialfall $p \in \mathbb{N}$ kann man die Ungleichung auch mittels vollständiger Induktion beweisen. (Freiwillige Wiederholung zum Thema vollständige Induktion.)

Man sieht: Der ‘analytische’ Beweis aus a) ist allgemeiner und dabei auch etwas einfacher.

3. Wir beweisen die Ungleichung

$$x y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

für alle $x, y \geq 0$, wobei $p > 1$ und q der zu p ‘konjugierte’ Exponent, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(Spezialfall $p = q = 2$: Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel, siehe UE 1, Aufgabe 2.)

- a) Halten Sie $y \geq 0$ beliebig fest und analysieren Sie die Funktion $f(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - x y$. Sehen Sie sich die Nullstelle von f' an und folgern Sie daraus das Resultat.

- b) Alternativer Beweis: Drücken Sie $x y$ mittels \exp und \ln aus und argumentieren Sie mit der Konvexität von \exp .

Hinweis: $\ln x = \frac{1}{p} \ln x^p$.

4. [Prüfungsaufgabe vom 11.10.2013:] Gegeben sei die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze. Charakterisieren Sie insbesondere das asymptotische Verhalten für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow \infty$.

Hinweis: Die Wendepunkte können Sie konkret berechnen (die Bestimmung und Auswertung der 3. Ableitung dürfen Sie sich ersparen; mit Rechnerunterstützung ist das natürlich kein Problem). Sie können die Existenz und ungefähre Lage der Wendepunkte aber auch anders argumentieren (Skizze!).

5. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x > 0$ mit

$$(1+x)^n < e n x$$

Geben Sie einen derartigen (von n abhängigen) Wert für x an.

6. Eine ‘inverse Kurvendiskussion’ ist eine Aufgabe, bei der man eine Funktion aufgrund vorgegebener Eigenschaften konstruiert.

Wir versuchen den Verlauf eines hängenden Seiles durch ein Polynom $p(x)$ vom Grad n zu beschreiben: $p(x)$ auf $[-1, 1]$, mit vorgegebenen Eigenschaften (eine verallgemeinerte Interpolationsaufgabe).

a) Wir wählen Grad $n = 2$ und fordern drei Eigenschaften:

- $p(-1) = p(1) = 1$
- $p'(0) = 0$

Ist das sinnvoll? Ist $p(x)$ eindeutig bestimmt?

b) Wir wählen Grad $n = 3$ und fordern zusätzlich

- $p''(0) = c$, wobei $c > 0$ vorgegeben.

Bestimmen Sie $p(x)$ in Abhängigkeit von dem Parameter c . Versuchen diesen ‘physikalisch’ zu interpretieren.

Was bedeutet $c = 0$ bzw. $c < 0$?

Anmerkung: Dies mag für grobe grafische Zwecke ausreichen (z.B. für den Zweck einer Animation am Computer). Eine physikalisch sinnvolle und präzise Lösung dieser Fragestellung ist jedoch (im homogenen Gravitationsfeld) durch die sogenannte *Kettenlinie* gegeben, die durch die Funktion \cosh bestimmt ist. (Siehe dazu ‘Praktische Mathematik II’ im SS.)

7. Gegeben sei die Funktion $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + \ln(1 - x^4)$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

Hinweis: Eine exakte Berechnung aller relevanter Größen ist hier nicht möglich. Z.B. müsste man eine der Nullstellen numerisch approximieren (etwa mit dem Newton-Verfahren, worauf wir hier verzichten.) Schreiben Sie jedoch die entsprechenden Gleichungen an und argumentieren Sie *qualitativ* (Skizze!), um die ungefähre Lage der Nullstellen und der lokalen Extrema zu erkennen.

(*) Besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = 0$: Ist das ein Wendepunkt? Hier benötigen Sie höhere Ableitungen von f , deren Berechnung per Hand eher mühsam ist. Es empfiehlt sich der Einsatz eines Computeralgebrasystems oder eines entsprechend ausgestatteten Taschenrechners.

8. Sei $W(\cdot)$ die in UE 5, Aufgabe 8 eingeführte Funktion (die sogenannte Lambert W-Funktion). Schreiben Sie ein kleines Computerprogramm bzw. verwenden Sie den Taschenrechner, um $x = W(y)$ für gegebenes $y > 0$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens numerisch zu approximieren.

Verwenden Sie dies, um $W(1)$ zu bestimmen. Wählen Sie als Startnäherung $x_0 = 0.5$ ($0.5 e^{0.5} \approx 0.82$ ist relativ nahe an 1). Beobachten Sie den Verlauf der Dezimalstellen der einzelnen Iterierten und das Residuum, um die Konvergenz zu beurteilen.

9. Sei x^* die exakte Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$, d.h., $x^* = \varphi(0)$, wobei $\varphi = f^{-1}$ die (lokale) Umkehrfunktion von f bezeichnet.

- a) Die Newton-Iteration $x_i \mapsto x_{i+1}$ zur Approximation von x^* basiert auf Linearisierung von f an den Stellen $x = x_i$, d.h., man ersetzt f durch ihre Tangente an der Stelle $(x_i, f(x_i))$ und bestimmt den Schnittpunkt x_{i+1} dieser Tangente mit der x -Achse.

Man kann dies auch so deuten: Linearisiert man die Umkehrfunktion $\varphi(y)$ an der Stelle $y_i = f(x_i)$, so erhält man

$$\varphi(y) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(y - y_i)$$

$$\text{also: } x^* = \varphi(0) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(-y_i) =: x_{i+1}$$

Verwenden Sie die Rechenregel 9.10 (Ableitung der Umkehrfunktion), um zu zeigen, dass das so definierte x_{i+1} tatsächlich mit dem Ergebnis des Newton-Schrittes $x_i \mapsto x_{i+1}$ identisch ist.

- b) (*) Die letztere Denkweise erlaubt es, ein verbessertes Newton-Verfahren zu konstruieren. Man approximiert $\varphi(y)$ durch ein Taylorpolynom höheren Grades (siehe Satz 10.1), z.B. zweiten Grades:

$$\varphi(y) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(y - y_i) + \frac{1}{2} \varphi''(y_i)(y - y_i)^2,$$

$$\text{also: } x^* = \varphi(0) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(-y_i) + \frac{1}{2} \varphi''(y_i) y_i^2 =: x_{i+1}$$

Dann stellt x_{i+1} einen verbesserten Näherungswert dar.

Zeigen Sie, dass die auf das verbesserte Newton-Verfahren in folgender Gestalt führt:

$$x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{f(x_i) f''(x_i)}{f'(x_i)^2} \right)$$

Anmerkung: Sie benötigen dazu die zweite Ableitung der Umkehrfunktion. Zu deren Herleitung geht man analog wie im Beweis der Rechenregel 9.10 vor.

- c) Wenden Sie dieses verbesserte Newton-Verfahren auf das Beispiel von Aufgabe 8 an und vergleichen Sie.

10. (*) Betrachten Sie die Riemann-Summe

$$R_h(f) := h \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad \text{wobei } h = \frac{1}{N}, \quad x_i = i h,$$

für eine stetige Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Laut Definition des Riemann-Integrals gilt $I(f) = \int_0^1 f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} R_h(f)$. Falls das Integral formelmäßig nicht berechenbar ist, kann man $R_h(f)$ für $h > 0$ als numerische Approximation verwenden ('Rechteckregel').

Im Folgenden betrachten wir zur Übung nur die einfache Funktion $f(x) = x^3$.

- a) Berechnen Sie $I(f)$, indem Sie den Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} R_h(f)$ bestimmen.

Hinweis/Anmerkung: Es gilt $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4} N^2 (N+1)^2$, wie man mittels vollständiger Induktion nachweist. Sie können dies auch als Teleskopsumme auffassen, indem Sie i^3 in der Form $\frac{1}{4} (i^2 (i+1)^2 - (i-1)^2 i^2)$ schreiben. Die Teleskopsumme ist das diskrete Analogon zu der Formel $I(f) = \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{4} \right) dx = \frac{1}{4}$.

- b) Geben Sie für den Fehler $|R_h(f) - I(f)|$ eine Abschätzung in Abhängigkeit von h an. Wie schnell geht der Fehler gegen 0 für $h \rightarrow 0$?
- c) Wie b), jedoch für die 'Trapezregel' [Skizze]

$$T_h(f) := h \sum_{i=1}^N \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}, \quad \text{mit } h = \frac{1}{N}, \quad x_i = i h.$$

1. Finden Sie eine Stammfunktion von $f(x)$ mittels partieller Integration / Substitution:

a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, b) $f(x) = \ln(1 + x^2)$, c) $f(x) = e^{ax} \sin(bx)$ ($a \neq 0$).

2. Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von

$$\frac{x^3 + 1}{x^2(x^3 - 1)}.$$

3. a) Sei $g = f^{-1}$. Sei weiters F die Stammfunktion von f und G die Stammfunktion von g .
Zeigen Sie: $G(x) = x g(x) - F(g(x))$.

b) Berechnen Sie $\int \arctan x \, dx$ mit Hilfe von a).

c) Berechnen Sie $\int W(x) \, dx$ mit Hilfe von a), wobei $W(x)$ die Lambertsche W-Funktion bezeichnet.

4. Überprüfen Sie, ob folgende uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie ggf. ihren Wert.

a) $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5. Geben Sie die allgemeine Darstellung von

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx$$

in Abhängigkeit von $m, n \in \mathbb{N}_0$ an.

Hinweis: Leiten Sie eine rekursive Darstellung her.

6. a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums die Konvergenz der Reihen

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (ii) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^\alpha}$

in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Hinweis: (i) ist im Vorlesungsskriptum abgehandelt. Vollziehen Sie das nach, und führen Sie (ii) auf (i) zurück, indem Sie das entsprechende Integral geeignet substituieren.

b) Der Beweis des Integralkriteriums beruht darauf, dass die Reihe einer Riemann-Summe für das Integral entspricht. Im Konvergenzfall gilt auch

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \leq \int_m^{\infty} f(x) \, dx \leq \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

Geben Sie mit Hilfe dieser beiden Ungleichungen je ein Intervall (a, b) an mit

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \in [a, b]$ (ii) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2} \in [a, b]$

7. Bestimmen Sie die Taylorreihen von $f(x) := \sqrt{1+x}$ und $g(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

8. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von

$$\int_0^x \frac{\ln(1-\xi)}{\xi} d\xi$$

sowie deren Konvergenzintervall.

Hinweis: Betrachten Sie die Taylorreihe von $\ln(1-x)$ bezüglich $x_0 = 0$.

9. a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1),$$

durch gliedweise Differentiation von

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

b) Allgemeiner: Leiten Sie eine Rekursionsformel für

$$S_m(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k^m x^k \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

her. Werten Sie $S_m(x)$ für $m = 1$ und $m = 2$ aus.

10. a) Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation des Graphen einer Funktion $f(x)$ um die x -Achse ($a \leq x \leq b$). Geben Sie eine Formel für das Volumen des Rotationskörpers an, und zwar in Form eines Integrals

$$\int_a^b r(x) dx.$$

Hinweis: Machen Sie eine Skizze und überlegen Sie, für welche Funktion r (in Abhängigkeit von f) die Riemann-Summen von r gegen das gesuchte Volumen konvergieren. So erhalten Sie die gesuchte Formel. Einfacher ausgedrückt: Man stellt sich vor, dass sich der Rotationskörper aus ‘unendlich vielen, unendlich dünnen Kreisscheiben’ zusammensetzt.

b) Ein etwas zerquetschter Faschingskrapfen entsteht durch Rotation der Kurve $y = \cos x$ um die x -Achse ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$). Berechnen Sie sein Volumen.