Schriftliche Ausarbeitungen der Übungsaufgaben werden jeweils nach der Übungsstunde auf der Homepage der LVA veröffentlicht. Deren Studium (im nachhinein) ist aber weder ein Ersatz für die eigenständige Auseinandersetzung mit dem Stoff (im vorhinein) noch für den Besuch der Übungsstunde.

Es gibt drei Typen von Aufgaben:

- *'Normale' Aufgaben (ohne (*)) bzw. Unterpunkte davon haben etwa den Charakter von möglichen Testaufgaben. (D.h., tatsächliche Testaufgaben sind ähnlich; sie werden in Umfang und Schwierigkeitsgrad an die zur Verfügung stehende Arbeitszeit angepasst.)*
- $(*)$ *Aufgaben mit (*) dienen der Vertiefung und können ggf. auch etwas schwieriger sein. Auch wenn es sich um keine typischen Testaufgaben handelt, ist die Beschäftigung damit nützlich für das aktive Erarbeiten des relevanten Stoffes.*
- $(**)$ *Kommt manchmal vor. Nicht testrelevant, behandelt stoffliche Erweiterungen, mit ausreichenden Hinweisen für die Lösung.*

---

1. Wie lautet die logische Negation der folgenden (wahren) Aussage?

Jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade,
und keine natürliche Zahl ist sowohl gerade als auch ungerade.

Drücken Sie die gegebene Aussage auch in der Sprache der formalen Logik aus (unter Verwendung von $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$).

Anmerkung: 'n gerade' drückt man formelmäßig aus als $n \bmod 2 = 0$, wobei $n \bmod m$ ('modulo') = Rest bei Division von n durch m.

2. Beweisen Sie die Ungleichungen

a) $x\,y \;\le\; \frac{1}{2}\left(\delta\,x^2 + \delta^{-1}\,y^2\right) \qquad (\delta > 0 \text{ beliebig}),$

b) $\sqrt{x\,y} \;\le\; \frac{x+y}{2}$

c) $x_1\,y_1 + x_2\,y_2 \;\le\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

für beliebige $0 \le x_{[i]}, y_{[i]} \in \mathbb{R}$.

3. Geben Sie einfache Formelausdrücke an (in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$) für die Werte der Summen

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} 2^i$.

4. $(*)$ Beweisen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1-4\,k^2} \;=\; \frac{n+1}{2\,n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Hinweis: Der Induktionsschluss erfordert ein wenig Rechenarbeit.

5. Zeigen Sie:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Hinweis: Binomischer Lehrsatz.

6. $(*)$

a) Gesucht ist eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die der folgenden 'Differenzengleichung' genügt:

$$f(n+1) - f(n) \;=\; n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Geben Sie alle möglichen Lösungsfunktionen $f(n)$ an.

b) Gleiche Frage wie unter **a)**, wobei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n-1) - 2\,f(n) + f(n+1) \;=\; 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

7. a) Geben Sie für die Menge

$$\{\, n \in \mathbb{N} :\; n^2 - 6\,n + 5 \;<\; n \,\}$$

eine explizite Darstellung an.

b) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(n) := n^2 - 2\,n + 5$$

- wohldefiniert?
- injektiv?
- surjektiv?

8. a) Welche Zahl wird durch die *binäre* Darstellung $0\,.\overline{1}$ repräsentiert?

b) Wandeln Sie die Dezimalzahl 0.1 in Binärdarstellung um.
Hinweis: Division in Binärarithmetik. (Ungewohnt, funktioniert jedoch analog wie in Dezimalarithmetik.)

c) Zeigen Sie: Jede endliche Binärzahl besitzt eine endliche Dezimaldarstellung. (Die Umkehrung gilt nicht; siehe **b**).)

9. a) Gesucht ist eine bijektive Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die streng monoton fallend ist, d.h. $f(n+1) < f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie ein derartige Funktion an oder zeigen Sie, dass sie nicht existieren kann.

b) Gleiche Frage wie unter **a)**, für $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

c) $(*)$ Konstruieren Sie eine bijektive Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^k$ $(k \in \mathbb{N})$. Sie müssen die Funktion nicht explizit formelmäßig angeben; beschreiben Sie, wie die Konstruktion funktioniert.

Anmerkung zur Notation: $A^k = A \times A \times \ldots \times A = \{(a_1, \ldots, a_k) \colon a_i \in A\}$.)

10. Ein Anwendungsproblem:

Für zwei in Serie bzw. parallel geschaltete elektrische Widerstände R_1 und R_2 ergibt sich der Gesamtwiderstand

$$R_{gesamt} \;=\; R_1 + R_2 \quad \text{(bei Serienschaltung)}, \qquad R_{gesamt} \;=\; \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad \text{(bei Parallelschaltung)}.$$

Folgern Sie daraus, dass die analogen Formeln für n in Serie bzw. parallel geschaltete Widerstände $(n \geq 2)$ wie folgt lauten:

$$R_{gesamt} \;=\; \sum_{i=1}^{n} R_i \quad \text{(bei Serienschaltung)}, \qquad R_{gesamt} \;=\; \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \quad \text{(bei Parallelschaltung)}.$$