1. Zeigen Sie:

a) Das Intervall $(0,1)$ hat dieselbe Mächtigkeit wie ein beliebiges Intervall (a,b), wobei $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Hinweis: Finden Sie eine bijektive Abbildung zwischen $(0,1)$ und (a,b).

$(*)$ Lassen Sie auch $a = 0$, $b = \infty$ als Grenzfall zu ($(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$). Die naheliegende Bijektion für den Fall $a,b \in \mathbb{R}$ lässt sich jedoch nicht auf diesen Grenzfall übertragen. (Ähnlich funktioniert es für (a,∞), $(-\infty,b)$ und $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$.)

b) $(*)$ Die Potenzmenge $P(X)$ einer beliebigen nichtleeren Menge X hat dieselbe Mächtigkeit wie die Menge aller Funktionen χ des Typs $\chi\colon X \to \{0,1\}$.

Hinweis: Die sogenannte *charakteristische Funktion* einer Teilmenge $A \subseteq X$ ist definiert durch

$$\chi_A : X \to \{0,1\}, \qquad \chi_A(x) := \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A. \end{cases}$$

c) Für eine endliche Menge X mit n Elementen gilt $|P(X)| = 2^n$.

Anmerkung: Die Mächtigkeit einer Menge A bezeichnet man mit $|A|$.

2. Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich und den Bildbereich der folgenden Funktionen, so dass diese wohldefiniert und bijektiv sind:

a) $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

b) $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2\,|x|$

c) $f : D \subseteq \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$
$x \mapsto 5\,x - 4$

d) $f : D \subseteq \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$
$x \mapsto \frac{3+2\,x}{1-x}$

3. Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ und $g(x) = \frac{1}{1-x}$.

a) Bestimmen Sie die maximalen reellen Definitionsbereiche von f und g.

b) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ zusammen mit ihren maximalen reellen Definitionsbereichen.

c) Bestimmen Sie die Abbildungen $f \circ f$, $f \circ f \circ f, \ldots, g \circ g$, $g \circ g \circ g, \ldots$. Was fällt Ihnen auf?

4. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und M eine Teilmenge von Y. Mit $f^{-1}(M)$ bezeichnet man das *Urbild* von M unter der Funktion f, d.h. die Menge[1]

$$f^{-1}(M) \ := \ \{x \in X : f(x) \in M\}.$$

Zeigen Sie:

a) f ist genau dann injektiv wenn $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ für jedes $A \subseteq X$.

b) f ist genau dann surjektiv wenn $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ für jedes $B \subseteq Y$.

Anmerkung: f ist also genau dann bijektiv, wenn

$$f^{-1}\big(f(A)\big) = A \quad \wedge \quad f\big(f^{-1}(B)\big) = B$$

für jedes $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ zutrifft.

5. Gegeben sei die Folge $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ mit $a_n = \frac{n-2}{n+1}$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - 1| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt, für **a)** $\varepsilon = \frac{1}{10}$, **b)** $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

[1] $f^{-1}(M)$ ist immer wohldefiniert, auch wenn f nicht bijektiv ist. Falls f bijektiv ist, dann gilt $f^{-1}(M) = \{f^{-1}(y) : y \in M\}$ mit der Umkehrfunktion f^{-1}.

6. Untersuchen Sie die Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils auf Monotonie und Beschränktheit. Berechnen Sie auch die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} x_n$, falls sie existieren.

a) $x_n = \dfrac{1-n+n^2}{n+1}$ **b)** $(*)$ $x_n = \dfrac{1-n+n^2}{n(n+1)}$ **c)** $x_n = \dfrac{1}{1+(-2)^n}$ **d)** $(*)$ $x_n = \sqrt{1+\dfrac{n+1}{n}}$

7. Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) *Eine Folge konvergiert, falls sie monoton und beschränkt ist.*

b) *Eine konvergente Folge ist monoton und beschränkt.*

c) *Wenn eine Folge nicht monoton ist, konvergiert sie nicht.*

d) *Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, konvergiert sie nicht.*

e) Für eine durch ein rekursives Gesetz der Form $a_n := f(a_{n-1})$ (mit vorgegebenem 'Startwert' a_1) definierte Folge bezeichnet man die Gleichung $a = f(a)$ als die zugehörige Fixpunktgleichung. (Dabei ist f eine gegebene Funktion.)

$(**)$ Behauptung: *Wenn es Lösungen a zur Fixpunktgleichung einer rekursiv definierten konvergenten Folge gibt, so konvergiert die Folge gegen einen dieser Werte a.*

Welche Eigenschaft muss für f an einer derartigen Stelle a gelten, damit die Aussage richtig ist? Kommt Ihnen diese Eigenschaft bekannt vor?

Anmerkung: Vgl. Aufgabe 8 und Kapitel 6 aus dem VO-Skriptum.

8. a) $(*)$ Beweisen Sie: Die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} := \sqrt{1+a_n}, \quad n \geq 1,$$

ist konvergent. Bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Folge monoton wachsend und durch $c = 2$ beschränkt ist, und nehmen Sie dann Bezug auf die Lösung von Aufgabe 7e).

b) Sei $m \in \mathbb{N}$ fest und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$b_n := \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} a_{n+k}.$$

Zeigen Sie: $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a.

9. Seien $a, b, p > 0$ positive reelle Zahlen. Der *Mittelwert vom Grad* p von a und b ist definiert als

$$S_p(a,b) := \left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = S_p(b,a).$$

Für $p = 1$ erhalten wir insbesondere das arithmetische Mittel von a und b, für $p = 2$ das sogenannte quadratische Mittel. Natürlich gilt $S_p(a,a) = a$ für alle p.

a) Zeigen Sie

$$S_p(a,b) \in (a,b) \quad \text{für} \quad a < b.$$

b) $(**)$ Bestimmen Sie den Grenzwert

$$S_\infty(a,b) := \lim_{p\to\infty} S_p(a,b)$$

Hinweis: Überlegen Sie, wie ein derartiger Grenzwert wohl definiert ist. Zum Beweis bringen Sie das Verhältnis $\frac{a}{b}$ von a und b ins Spiel und verwenden das Einschließungsprinzip.

10. Zeigen Sie

$$\frac{1+2^3+\cdots+n^3}{n^4} \to \frac{1}{4}$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die (etwas kurios anmutende) Identität $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.