1. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 := q, \quad a_n := p\, a_{n-1} + q\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

mit $p \geq 0$ und $q \in \mathbb{R}$. Interpretation: Zunahme bzw. Abnahme einer Population a_n um einen Faktor p von Zeitpunkt zu Zeitpunkt, korrigiert um q (Zuwanderung oder Abwanderung) in jedem Schritt. (Der Fall $p = 0$ ist trivial.)

a) Leiten Sie eine explizite Formel für die a_n her.

b) Berechnen Sie den 'asymptotischen Zustand' $a_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

- unter Verwendung der Lösungsdarstellung aus a),
- unter direkter Verwendung der rekursiven Definition der a_n,

für diejenigen Werte von p, für die der Limes a_∞ existiert. (Welche Werte sind das?)

2. Fortsetzung von Aufgabe 1: Sei nun p so vorausgesetzt, dass in 1b) Konvergenz vorliegt.

Wir betrachten die allgemeinere Rekursion

$$a_0 := q_0, \quad a_n := p\, a_{n-1} + q_n\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

mit einer gegebenen Folge $\{q_n\}$.

a) Geben Sie eine explizite Formel für die a_n an (Darstellung als Summe).

b) Sei $q_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (Zuwanderung). Wir fragen: Bleibt die Population a_n beschränkt für $n \to \infty$? Geben Sie eine Bedingung an die Folge $\{q_n\}$ an, die dafür hinreichend ist, und geben Sie für diesen Fall eine Schranke A an, so dass $a_n \leq A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) (*) Die Frage der Konvergenz der Folge $\{a_n\}$ lässt sich hier nicht allgemein beantworten, da dies vom genauen Verhalten der q_n abhängt. Betrachten Sie den Fall $q_n = 2^{-n}$ (exponentiell abnehmende Zuwanderung). Zeigen Sie: Die Population a_n stirbt aus für $n \to \infty$. (Beachten Sie: $p = \frac{1}{2}$ ist ein Sonderfall.)

3. Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{a}{n-b} - \frac{b}{n+a} \right)$$

konvergent? ($n_0 > \max\{|a|, |b|\}$ hinreichend groß angenommen, so dass Summanden wohldefiniert.)

4. Entscheiden Sie, ob bzw. für welche Werte von x (in b)) die folgenden Reihen bedingt bzw. absolut konvergieren:

$$\textbf{a)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \quad \textbf{b)}\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \textbf{c)}\ 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \textbf{d)}\ 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{4}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}} \right)}{2k+1}$$

– Freiwillige Zusatzaufgabe zu c), d) — dafür benötigt man ein kleines Computerprogramm (manuell am Taschenrechner auswerten ist zu mühsam):

Werten Sie für c) die Partialsummen der ersten $10, 20, 30, 40, \ldots$ Reihenglieder numerisch aus. Man sieht, gegen welchen Wert die Reihe offenbar konvergiert (beweisen können wir das hier – noch – nicht). Geben Sie eine Abschätzung für den Reihenrest der n-ten Partialsumme an.

Die Konvergenzgeschwindigkeit der Reihe c) ist sehr bescheiden. Werten Sie auch für die lustige Reihe d) die n-ten Partialsummen aus für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Was beobachten Sie?

5. Zeigen Sie: Falls die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

6. Sei $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Entscheiden Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die sogenannte *binomische Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{c}{n} x^n$$

absolut konvergiert.

Hinweis: $\binom{c}{n} := \dfrac{c(c-1)\cdots(c-n+1)}{n!}$ ist der verallgemeinerte Binomialkoeffizient (mit $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$).

7. Gegeben seien die Folgen $(a_k) = (p^k)$ und $(b_k) = (q^k)$, wobei $|p| < 1$ und $|q| < 1$. Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sind konvergente geometrische Reihen.

a) Bestimmen Sie den Wert der zugehörigen Cauchy'schen Produktreihe.

b) (*) Welcher Sonderfall tritt hier auf? Diskutieren Sie diesen separat.

8. Neben den in der VO besprochenen Kriterien für die Konvergenz von Reihen gibt es auch weitere Kriterien, z.B. das sogenannte *Verdichtungskriterium:*

Ist $\{a_n\}$ eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \, a_{2^k}$$

konvergiert.

Verwenden Sie dieses Kriterium, um zu zeigen, dass die verallgemeinerte harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert.

9. Ein punktförmiges Tierchen namens Bello startet im linken unteren Eck eines gleichschenkeligen Dreiecks Δ mit Seitenlänge a m und krabbelt mit konstanter Geschwindigkeit v m/s geradlinig auf den Mittelpunkt der gegenüber liegenden Seite zu. Dann kehrt es um und krabbelt mit Geschwindigkeit v waagrecht bis zur linken Kante zurück. Dann wiederholt sich dieser Vorgang 'unendlich oft', wobei sich Bellos Geschwindigkeit in der n-ten Iteration auf v/n^p verlangsamt, mit $p \in \mathbb{N}$. Im Limes landet Bello in der oberen Ecke von Δ.

a) Einen wie langen Weg legt Bello insgesamt zurück?

b) Erreicht er sein Ziel in endlicher Zeit, bzw. hängt dies von p ab?

(Machen Sie eine Skizze.)

10. Gegeben sei die Funktion $f\colon (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + p(x)} - 1}{x^2},$$

wobei $p(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \, x^i$ ein gegebenes Polynom ist mit $p(0) = 0$.

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ ist wohldefiniert für hinreichend kleines $\delta > 0$.

b) Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck '$f(0) = 0/0$'. Untersuchen Sie, für welche Polynome p an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vorliegt. Falls dies zutrifft, geben Sie den Wert der stetigen Fortsetzung an, d.h. den Limes

$$\lim_{x \to 0} f(x).$$

In welcher Weise hängt dieser Limes von dem Polynom p ab?