1. Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion.

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ besitzt in $[a,b]$ mindestens einen *Fixpunkt* $x^* \in [a,b]$, d.h. $x^* \in [a,b]$ mit der Eigenschaft $x^* = f(x^*)$.

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g(x) = x - f(x)$ an.

b) f sei sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L < 1$, d.h. f ist eine sogenannte *Kontraktion.* Zeigen Sie: Der Fixpunkt x^* ist eindeutig. Geben Sie auch ein konkretes Beispiel an.

c) Man kann x^* iterativ approximieren: Ausgehend von einem Startwert $x_0 \in [a,b]$ berechnet man

$$x_{i+1} := f(x_i), \quad i = 0,1,2,\ldots$$

Diese *Fixpunktiteration* erzeugt eine Folge $\{x_i\}$. Zeigen Sie, dass diese gegen den Fixpunkt x^* konvergiert. Geben Sie auch eine Fehlerabschätzung der Form

$$|x_i - x^*| \le C_i\,|x_0 - x_*| \tag{1}$$

an. Wie hängen die C_i von der Kontraktionsrate $L \in [0,1)$ ab?

d) (1) ist eine sogenannte *a priori - Fehlerabschätzung.* Sie sagt die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration in Abhängigkeit von L vorher. Eine numerisch auswertbare, sogenannte *a posteriori - Fehlerabschätzung* erhält man daraus mittels $|x_0 - x^*| \le b - a$, sofern man die Kontraktionsrate L kennt. (Dies kann dazu benützt werden, die Iteration zu steuern, d.h., abzubrechen, sobald das gewünschte Genauigkeitsniveau erreicht ist.)

($*$) Letztere Abschätzung ist zu pessimistisch, falls x_0 schon nahe an x^* liegt. Zeigen Sie, dass folgende verbesserte a-posteriori - Abschätzung gilt:

$$|x_i - x^*| \le \frac{L^i}{1-L}\,|x_1 - x_0|\,. \tag{2}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$|x_i - x^*| \le \frac{L}{1-L}\,|x_i - x_{i-1}|\,.$$

2. Fortsetzung von Aufgabe 1:

Gesucht ist eine Lösung $x = x^* \in [0,1]$ der Gleichung $x^3 + 4\,x - 1 = 0$. Dies ist äquivalent zur Lösung der Fixpunktgleichung

$$x = f(x), \quad f\colon\, [0,1] \to [0,1]: \quad f(x) = \frac{1-x^3}{4}\,.$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon\, [0,1] \to [0,1]$ ist eine Kontraktion.

b) Führen Sie einige Schritte der Fixpunktiteration am Rechner aus, z.B. ausgehend von $x_0 := \frac{1}{2}$, und vergleichen Sie die echten Fehler $x_i - x^*$ mit der Abschätzung (2).

Anmerkung: Die exakte Lösung ist $x^* = \frac{c}{6} - \frac{8}{c}$ mit $c = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{849}}$; $x^* \approx 0.246266\ldots$

3. Bestimmen Sie die Polstellen und deren Ordnungen für folgende Funktionen in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x + a}{(x-1)^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 + a\,x + 8}{x^2 - 4}$

4. a) Sei $f: I \to J$ eine auf einem Intervall I definierte stetige und bijektive Funktion (das Bild $J = f(I)$ ist auch ein Intervall). Geben Sie eine Bedingung an f an, so dass $f^{-1}: J \to I$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitzkonstante K. (Stellen Sie sich das Ganze auch anschaulich anhand einer Skizze vor.)

b) Seien f und g zwei Lipschitz-stetige Funktionen. Bestimmen Sie je eine Lipschitzkonstante für $f \circ g$ und $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ mal}}$.

c) Seien f und g zwei beschränkte Lipschitz-stetige Funktionen. Bestimmen Sie eine Lipschitzkonstante für die Produktfunktion $f \cdot g$.

5. a) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \frac{x^n - c^n}{x - c}$$

sich an $x = c$ stetig fortsetzen lässt, und berechen Sie den Wert der stetigen Fortsetzung dieser Stelle.

b) Analog wie a), für

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}\,, \quad c = 0\,.$$

Geben Sie auch die Umkehrfunktion von $f\colon\ [0,1] \to f([0,1])$ an und machen Sie eine Skizze.

c) Sei f Lipschitz-stetig. Kann man zeigen, dass dann die Funktion

$$g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

an $x = c$ stetig fortsetzbar ist? (Versuchen Sie es.) Welchen Wert hat die stetige Fortsetzung an $x = c$ (falls sie existiert)?

6. Die Funktion $\mathrm{Li}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}$ nennt man den *Polylogarithmus* vom Grad k. (Für $k = 1$ erhält man den gewöhnlichen natürlichen Logarithmus $\ln x$.)

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Li}_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ (der Trilogarithmus) auf $[0,1]$ wohldefiniert und Lipschitz-stetig ist. Bestimmen Sie die Lipschitzkonstante L.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Li}_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (der Dilogarithmus) auf $[0,1]$ wohldefiniert ist und für beliebige $\varepsilon \in (0,1)$ auf $[0, 1-\varepsilon]$ Lipschitz-stetig ist. Bestimmen Sie die Lipschitzkonstante $L = L(\varepsilon)$.

Zusatzfrage: Was meinen Sie: Wie verhält sich $\mathrm{Li}_2(x)$ in der Nähe der Stelle $x = 1$ (mit $\mathrm{Li}_2(1) = \pi^2/6$)?

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Folge von Lipschitzkonstanten $L = L_n$ für die Funktionen $x^n\colon\ [0,1] \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

7. Wir betrachten einen senkrecht hüpfenden (punktförmigen) Ball.[1] Die Höhe des Balles zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $y = h(t)$. Die Bewegung des Balles beschleunige sich in folgender Weise:

Start bei $y(0) = 0$.

Für $t \in (0, \frac{1}{4})$ bewegt sich der Ball vom Boden, also $y = 0$, auf Höhe $y = 1$.

Für $t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ bewegt sich der Ball wieder zurück zu $y = 0$.

Für $t \in (\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$ bewegt sich der Ball zurück zu $y = 1$.

Für $t \in (\frac{5}{8}, \frac{3}{4})$ bewegt sich der Ball wieder zu $y = 0$.

Für $t \in (\frac{3}{4}, \frac{13}{16})$ $\quad \ldots$

usw. Jede der Teilstrecken wird mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, und diese verdoppelt sich von Schritt zu Schritt.

Skizzieren Sie die Funktion $h(t)$. Ist $h(t)$ linksseitig stetig fortsetzbar an der Stelle $t = 1$?

8. Funktionen können auch *implizit* definiert sein, d.h. als Lösung einer parameterabhängigen Gleichung. Betrachten Sie die Gleichung

$$\frac{y-1}{x+1} = 1 - xy$$

für die Unbekannte y in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$. Durch ihre Lösung ist eine Funktion $y = f(x)$ definiert. Wie lautet diese? Ist sie wohldefiniert und stetig für alle $x \in \mathbb{R}$?

Besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = -1$. Was ist $f(-1)$?

9. Funktionen können auch in *rekursiver* Weise definiert sein. Betrachten Sie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ f(\frac{x}{2}), & x > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion wohldefiniert ist. Wo ist sie stetig, und wie lauten die Unstetigkeitsstellen und ihr Typ? Skizzieren Sie auch den Grafen ;–) von f.

10. Finden Sie Folgen $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$, so dass

$$\delta_n(x) := \frac{a_n}{b_n + c_n\, x^2} \geq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, und

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n$ nennt man *Dirac-Funktion* oder auch Dirac'sche Delta-Distribution, und eine Folge, die gegen die Dirac-Funktion konvergiert, nennt man eine Dirac-Folge. Man beachte, dass $\delta(x)$ keine Funktion im gewöhnlichen Sinn ist.

[1] Das Beispiel ist konstruiert und entspricht nicht einer physikalischen Realität.