1. Zerlegen Sie folgende Polynome in Linearfaktoren:

a) $x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - x$

b) $x^3 - x^2 - c^2\,x + c^2, \quad c \in \mathbb{R}$

Für welche Werte von c treten mehrfache Nullstellen (doppelt oder dreifach) auf?

c) $x^{10} - 5\,c\,x^8 + 10\,c^2\,x^6 - 10\,c^3\,x^4 + 5\,c^4\,x^2 - c^5, \quad c \geq 0$

Welcher Wert von c ergibt einen Sonderfall?

2. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

a) $\dfrac{2\,x^2 + 4\,x + 1}{x^3 + 2\,x^2 + x}$

b) $\dfrac{1+x}{x^2 - y^2}$: Zunächst PBZ bezüglich der Variablen x, wobei $y \in \mathbb{R}$ als fester Parameter angesehen wird, danach mit vertauschten Rollen. Achten Sie auf Sonderfälle.

c) $\dfrac{x}{x^3 - x^2 - c^2\,x + c^2}$, $c \in \mathbb{R}$: Berücksichtigen Sie Sonderfälle (spezielle Werte von c).

3. Man bestimme das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0 \ldots 3\}$:

a) $\{\,(-3,+1),\ (-1,+1),\ (+1,+1),\ (+3,+1)\,\}$

b) $\{\,(-3,+2),\ (-1,+1),\ (+1,+1),\ (+3,+2)\,\}$

c) $\{\,(-3,-2),\ (-1,-1),\ (+1,+1),\ (+3,+2)\,\}$

d) $\{\,(-3,-1),\ (-1,-1),\ (+1,+1),\ (+3,+2)\,\}$

Diese Aufgabe löst man sinnvollerweise am Computer.

4. a) Herr P. Olynom rechnet gerne mit Polynomen. Er sucht nun nach speziellen, nämlich nach auf ganz $\mathbb{R}$ strikt monoton wachsenden Polynomen. Geben Sie eine naheliegende Klasse derartiger Polynome vom Maximalgrad $n \in \mathbb{N}$ an.

b) (*) Gegeben sei das quadratische Polynom $p(x) = x(x-1),\ x \geq 0$. Geben Sie $\xi > 0$ so an, dass p auf $[\xi, \infty)$ strikt monoton wachsend ist.

Anmerkung: Mittels Differentialrechnung geht das sehr einfach. Sie sollen hier jedoch direkt ausgehend von der Definition der Monotonie argumentieren.

Hinweis: Schreiben Sie $p(y) - p(x)$ in der Form $(\ldots)(y-x)$. Warum ist a priori klar, dass das möglich ist?

c) Sei f monoton wachsend und g monoton fallend. Welches Monotonieverhalten haben die Funktionen $f \circ f,\ f \circ g,\ g \circ f$ und $g \circ g$?

5. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = (1+x)^{1/x},\ x > 0$.

a) Liegt an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vor, d.h. existiert der Grenzwert

$$f(0) := \lim_{x \to 0+} f(x) \quad ?$$

Falls ja $-$ wie lautet sein Wert? Wenn Sie das naheliegende Argument gefunden haben, überlegen Sie, ob dies wirklich rigoros ist.

b) Angenommen, Sie kennen den Wert des Limes nicht, Sie wollen ihn aber berechnen bzw. approximieren. Vorschlag (Rechner verwenden): Interpolieren Sie f an den Stellen $x = 0.01,\ 0.02,\ 0.03$ durch ein Polynom $p(x)$ vom Grad 2, und verwenden Sie $p(0)$ als Approximation für $f(0)$. Wie genau ist diese Approximation?

Anmerkung: Man kann auch andere Auswertungsstellen und ein Polynom höheren Grades verwenden. Um zu beurteilen, welche Genauigkeit man mit welcher Variante erwarten kann, benötigt man etwas Approximationstheorie, die wir hier nicht behandeln.

Haben Sie eine Idee, wie man die Approximation einfacher bewerkstelligen könnte?

6. a) Eine zeitabhängige Größe $X = X(t)$ gehorche dem Gesetz $X(t) = C\,e^{\lambda t}$, $t \geq 0$, mit $C = X(0) > 0$ und der Abklingrate $\lambda < 0$. (Beispiel: Radioaktiver Zerfall. Falls wir z.B. die Zeit in Stunden [h] messen, dann hat λ die Dimension 'pro Stunde', also $[\mathrm{h}^{-1}]$.)

Der Anfangswert C und die Abklingrate λ seien unbekannt, aber bekannt sind Messwerte $0 < X_1 = X(t_1)$ und $0 < X_2 = X(t_2) < X_1$ zu zwei Zeitpunkten $t_2 > t_1 > 0$. Geben Sie Formelausdrücke an (in Abhängigkeit von t_1, t_2, X_1, X_2) für die Werte von C und λ. Stellen Sie C in der Form $C = X_1^{\gamma_1} + X_2^{\gamma_2}$ dar, mit geeigneten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

b) Es gelte $X(t) = C\,e^{\lambda t}$, mit $C = X(0)$ und bekanntem $\lambda < 0$. Zu welchem Zeitpunkt t fällt der Wert $X(t)$ auf das 10^n - fache ab im Vergleich zu $X(0)$ $(n \in \mathbb{N})$?

c) Licht, das in eine Schicht aus Glas eintritt, wird in exponentieller Weise abgeschwächt (Absorption), d.h., es gilt ein Abschwächungsgesetz analog zum Zerfallsgesetz aus a), b). Für ein konkretes Material (Glas) wird gemessen, dass die Intensität des Lichtes pro zurückgelegtem Millimeter um 1% abnimmt. Um welchen Faktor wird dann die Intensität des Lichtes durch eine 5 cm dicke Glasscheibe abgeschwächt?

7. Man skizziere die Funktionen

a) $f(x) = e^{\alpha x} \sin x, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = e^{-(\frac{x-\alpha}{\beta})^2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \ln \dfrac{x-1}{x+1}$

und bestimme Nullstellen und Unendlichkeitsstellen.

8. a) Geben Sie für den Wert von $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k^m)$ einen möglichst einfachen Formelausdruck an $(m, n \in \mathbb{N})$.

b) Sei $W(x)$ definiert als die Umkehrfunktion von $f(x) = x\,e^x$, $x \geq 0$. Diese ist nicht in elementarer Weise darstellbar aber wohldefiniert, und wir nehmen sie als neue Funktion in unseren Zoo von Standardfunktionen auf.[1]

(i) Drücken Sie eindeutige Lösung der Gleichung $x = e^{-x}$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

(ii) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x^2 = e^{-x}$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

9. a) Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\omega \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$f(t) = a\cos(\omega\,t) + b\sin(\omega\,t)$$

in der Form

$$f(t) = A\,\sin(\omega\,t - \varphi) \quad \text{bzw.} \quad f(t) = A\,\cos(\omega\,t - \psi)$$

mit passenden $A \geq 0$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. Geben Sie explizit an, wie die *Amplitude* A und die *Phasenverschiebung* φ bzw. ψ mit a und b zusammenhängen.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Additionstheorems für den Kosinus:

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}\big(\cos(2\,\alpha) + \cos(2\,\beta)\big)\,.$$

10. a) Zeigen Sie

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-x\,y}\right)$$

Hinweis: Man geht vom Tangens aus, siehe VO, Abschnitt 8.5.

b) Spielen Sie ein bisschen damit, um zu zeigen

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Wert von $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ mit Hilfe von a).

Anmerkung: Die Identität b) wurde in UE 3, Aufgabe 4 d) dazu verwendet, um eine rasch konvergente Reihenentwicklung für $\frac{\pi}{4}$ zu gewinnen, und zwar mittels der Potenzreihenentwicklung von $\arctan x$. Mehr darüber in der VO, Kapitel 13, und in der UE 8.

[1] Viele wichtige Funktionen der mathematischen Physik sind nicht elementar und als Umkehrfunktionen oder über Integrale etc. definiert. Für die rechnerische Praxis besteht kein wesentlicher Unterschied, weil alle diese Funktionen – inklusive der elementaren Funktionnen – am Computer numerisch approximiert werden müssen.