Zitate beziehen sich auf das Vorlesungsskriptum, Edition 2013.

1. a) Zeigen Sie dass die Funktion $f\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}^+$,

$$f(x) \ = \ x^2\, e^{1/x}$$

strikt konvex ist und dass sie eine eindeutige Minimalstelle $x = x_{min}$ besitzt. Geben Sie x_{min} und $f(x_{min})$ an.

b) Gleiche Frage wie unter a), für

$$f(x) \ = \ e^x\, e^{1/x}$$

2. a) Seien $x, y \geq 0$ und $p \geq 1$ reelle Zahlen. Beweisen Sie die Ungleichung

$$(x+y)^p \ \leq \ 2^{p-1}\,(x^p + y^p)$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion $f(\xi) = \xi^p$ konvex ist für $\xi \geq 0$, und nützen Sie dies aus.

b) (*) Für den Spezialfall $p \in \mathbb{N}$ kann man die Ungleichung auch mittels vollständiger Induktion beweisen. (Freiwillige Wiederholung zum Thema vollständige Induktion.)

Man sieht: Der 'analytische' Beweis aus a) ist allgemeiner und dabei auch etwas einfacher.

3. Wir beweisen die Ungleichung

$$x\,y \ \leq \ \frac{x^p}{p} + \frac{y^{\,q}}{q}$$

für alle $x, y \geq 0$, wobei $p > 1$ und q der zu p 'konjugierte' Exponent, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(Spezialfall $p = q = 2$: Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel, siehe UE 1, Aufgabe 2.)

a) Halten Sie $y \geq 0$ beliebig fest und analysieren Sie die Funktion $f(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^{\,q}}{q} - x\,y$. Sehen Sie sich die Nullstelle von f' an und folgern Sie daraus das Resultat.

b) Alternativer Beweis: Drücken Sie $x\,y$ mittels exp und ln aus und argumentieren Sie mit der Konvexität von exp.

Hinweis: $\ln x = \frac{1}{p}\,\ln x^p$.

4. [Prüfungsaufgabe vom 11.10.2013:] Gegeben sei die Funktion $f\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}^+$,

$$f(x) \ = \ \frac{\big(\ln x\big)^2}{x}$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze. Charakterisieren Sie inbesondere das asymptotische Verhalten für $x \to 0$ und $x \to \infty$.

Hinweis: Die Wendepunkte können Sie konkret berechnen (die Bestimmung und Auswertung der 3. Ableitung dürfen Sie sich ersparen; mit Rechnerunterstützung ist das natürlich kein Problem). Sie können die Existenz und ungefähre Lage der Wendepunkte aber auch anders argumentieren (Skizze!).

5. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x > 0$ mit

$$(1+x)^n \; < \; e\,n\,x$$

Geben Sie einen derartigen (von n abhängigen) Wert für x an.

6. *Eine 'inverse Kurvendiskussion' ist eine Aufgabe, bei der man eine Funktion aufgrund vorgegebener Eigenschaften konstruiert.*

Wir versuchen den Verlauf eines ein hängenden Seiles durch ein Polynom $p(x)$ vom Grad n zu beschreiben: $p(x)$ auf $[-1,1]$, mit vorgegebenen Eigenschaften (eine verallgemeinerte Interpolationsaufgabe).

a) Wir wählen Grad $n=2$ und fordern drei Eigenschaften:

- $p(-1) = p(1) = 1$
- $p'(0) = 0$

Ist das sinnvoll? Ist $p(x)$ eindeutig bestimmt?

b) Wir wählen Grad $n=3$ und fordern zusätzlich

- $p''(0) = c$, wobei $c > 0$ vorgegeben.

Bestimmen Sie $p(x)$ in Abhängigkeit von dem Parameter c. Versuchen diesen 'physikalisch' zu interpretieren.

Was bedeutet $c = 0$ bzw. $c < 0$?

Anmerkung: Dies mag für grobe grafische Zwecke ausreichen (z.B. für den Zweck einer Animation am Computer). Eine physikalisch sinnvolle und präzise Lösung dieser Fragestellung ist jedoch (im homogenen Gravitationsfeld) durch die sogenannte *Kettenlinie* gegeben, die durch die Funktion cosh bestimmt ist. (Siehe dazu 'Praktische Mathematik II' im SS.)

7. Gegeben sei die Funktion $f\colon\, (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \; = \; x + \ln(1-x^4)$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

Hinweis: Eine exakte Berechnung aller relevanter Größen ist hier nicht möglich. Z.B. müsste man eine der Nullstellen numerisch approximieren (etwa mit dem Newton-Verfahren, worauf wir hier verzichten.) Schreiben Sie jedoch die entsprechenden Gleichungen an und argumentieren Sie *qualitativ* (Skizze!), um die ungefähre Lage der Nullstellen und der lokalen Extrema zu erkennen.

(*) Besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = 0$: Ist das ein Wendepunkt? Hier benötigen Sie höhere Ableitungen von f, deren Berechnung per Hand eher mühsam ist. Es empfiehlt sich der Einsatz eines Computeralgebrasystems oder eines entsprechend ausgestatteten Taschenrechners.

8. Sei $W(\cdot)$ die in UE 5, Aufgabe 8 eingeführte Funktion (die sogenannte Lambert W - Funktion). Schreiben Sie ein kleines Computerprogramm bzw. verwenden Sie den Taschenrechner, um $x = W(y)$ für gegebenes $y > 0$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens numerisch zu approximieren.

Verwenden Sie dies, um $W(1)$ zu bestimmen. Wählen Sie als Startnäherung $x_0 = 0.5$ ($0.5\,e^{0.5} \approx 0.82$ ist relativ nahe an 1). Beobachten Sie den Verlauf der Dezimalstellen der einzelnen Iterierten und das Residuum, um die Konvergenz zu beurteilen.

9. Sei x^* die exakte Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$, d.h., $x^* = \varphi(0)$, wobei $\varphi = f^{-1}$ die (lokale) Umkehrfunktion von f bezeichnet.

a) Die Newton-Iteration $x_i \mapsto x_{i+1}$ zur Approximation von x^* basiert auf Linearisierung von f an den Stellen $x = x_i$, d.h., man ersetzt f durch Ihre Tangente an der Stelle $(x_i, f(x_i))$ und bestimmt den Schnittpunkt x_{i+1} dieser Tangente mit der x - Achse.

Man kann dies auch so deuten: Linearisiert man die Umkehrfunktion $\varphi(y)$ an der Stelle $y_i = f(x_i)$, so erhält man

$$\varphi(y) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(y - y_i)$$

$$\text{also:} \qquad x^* = \varphi(0) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(-y_i) =: x_{i+1}$$

Verwenden Sie die Rechenregel 9.10 (Ableitung der Umkehrfunktion), um zu zeigen, dass das so definierte x_{i+1} tatsächlich mit dem Ergebnis des Newton-Schrittes $x_i \mapsto x_{i+1}$ identisch ist.

b) (*) Die letztere Denkweise erlaubt es, ein verbessertes Newton-Verfahren zu konstruieren. Man approximiert $\varphi(y)$ durch ein Taylorpolynom höheren Grades (siehe Satz 10.1), z.B. zweiten Grades:

$$\varphi(y) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(y - y_i) + \frac{1}{2}\varphi''(y_i)(y - y_i)^2,$$

$$\text{also:} \qquad x^* = \varphi(0) \approx \varphi(y_i) + \varphi'(y_i)(-y_i) + \frac{1}{2}\varphi''(y_i)\, y_i^2 =: x_{i+1}$$

Dann stellt x_{i+1} einen verbesserten Näherungswert dar.

Zeigen Sie, dass die auf das verbesserte Newton-Verfahren in folgender Gestalt führt:

$$x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{f(x_i)\, f''(x_i)}{f'(x_i)^2}\right)$$

Anmerkung: Sie benötigen dazu die zweite Ableitung der Umkehrfunktion. Zu deren Herleitung geht man analog wie im Beweis der Rechenregel 9.10 vor.

c) Wenden Sie dieses verbesserte Newton-Verfahren auf das Beispiel von Aufgabe 8 an und vergleichen Sie.

10. (*) Betrachten Sie die Riemann-Summe

$$R_h(f) := h \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\,, \quad \text{wobei} \quad h = \frac{1}{N}\,, \quad x_i = i\,h\,,$$

für eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Laut Definition des Riemann-Integrals gilt $I(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} R_h(f)$. Falls das Integral formelmäßig nicht berechenbar ist, kann man $R_h(f)$ für $h > 0$ als numerische Approximation verwenden ('Rechteckregel').

Im Folgenden betrachten wir zur Übung nur die einfache Funktion $f(x) = x^3$.

a) Berechnen Sie $I(f)$, indem Sie den Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} R_h(f)$ bestimmen.

Hinweis/Anmerkung: Es gilt $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} N^2 (N+1)^2$, wie man mittels vollständiger Induktion nachweist. Sie können dies auch als Teleskopsumme auffassen, indem Sie i^3 in der Form $\frac{1}{4}\left(i^2 (i+1)^2 - (i-1)^2 i^2\right)$ schreiben. Die Teleskopsumme ist das diskrete Analogon zu der Formel $I(f) = \displaystyle\int_0^1 x^3\,dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) dx = \frac{1}{4}$.

b) Geben Sie für den Fehler $|R_h(f) - I(f)|$ eine Abschätzung in Abhängigkeit von h an. Wie schnell geht der Fehler gegen 0 für $h \to 0$?

c) Wie b), jedoch für die 'Trapezregel' [Skizze]

$$T_h(f) := h \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\,, \quad \text{mit} \quad h = \frac{1}{N}\,, \quad x_i = i\,h\,.$$