1. Finden Sie eine Stammfunktion von $f(x)$ mittels partieller Integration / Substitution:

a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, **b)** $f(x) = \ln(1 + x^2)$, **c)** $f(x) = e^{ax} \sin(bx) \quad (a \neq 0)$.

2. Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von

$$\frac{x^3 + 1}{x^2\,(x^3 - 1)} \, .$$

3. **a)** Sei $g = f^{-1}$. Sei weiters F die Stammfunktion von f und G die Stammfunktion von g. Zeigen Sie: $G(x) = x\,g(x) - F(g(x))$.

b) Berechnen Sie $\int \arctan x \, dx$ mit Hilfe von **a)**.

c) Berechnen Sie $\int W(x)\, dx$ mit Hilfe von **a)**, wobei $W(x)$ die Lambertsche W-Funktion bezeichnet.

4. Überprüfen Sie, ob folgende uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie ggf. ihren Wert.

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5. Geben Sie die allgemeine Darstellung von

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m\,(1-x)^n \, dx$$

in Abhängigkeit von $m, n \in \mathbb{N}_0$ an.

Hinweis: Leiten Sie eine rekursive Darstellung her.

6. **a)** Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums die Konvergenz der Reihen

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^\alpha}$

in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Hinweis: (i) ist im Vorlesungsskriptum abgehandelt. Vollziehen Sie das nach, und führen Sie (ii) auf (i) zurück, indem Sie das entsprechende Integral geeignet substituieren.

b) Der Beweis des Integralkriteriums beruht darauf, dass die Reihe einer Riemann-Summe für das Integral entspricht. Im Konvergenzfall gilt auch

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \;\leq\; \int_m^{\infty} f(x)\,dx \;\leq\; \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

Geben Sie mit Hilfe dieser beiden Ungleichungen je ein Intervall (a, b) an mit

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \in [a, b]$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2} \in [a, b]$

7. Bestimmen Sie die Taylorreihen von $f(x) := \sqrt{1+x}$ und $g(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

8. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von

$$\int_0^x \frac{\ln(1-\xi)}{\xi}\, d\xi$$

sowie deren Konvergenzintervall.

Hinweis: Betrachten Sie die Taylorreihe von $\ln(1-x)$ bezüglich $x_0 = 0$.

9. a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, x^k \;=\; \frac{x}{(1-x)^2}\,, \qquad x \in (-1,1),$$

durch gliedweise Differentation von

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}\,.$$

b) Allgemeiner: Leiten Sie einen Rekursionsformel für

$$S_m(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^m x^k \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

her. Werten Sie $S_m(x)$ für $m = 1$ und $m = 2$ aus.

10. a) Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation des Graphen einer Funktion $f(x)$ um die x-Achse ($a \le x \le b$). Geben Sie eine Formel für das Volumen des Rotationskörpers an, und zwar in Form eines Integrals

$$\int_a^b r(x)\, dx\,.$$

Hinweis: Machen Sie eine Skizze und überlegen Sie, für welche Funktion r (in Abhängigkeit von f) die Riemann-Summen von r gegen das gesuchte Volumen konvergieren. So erhalten Sie die gesuchte Formel. Einfacher ausgedrückt: Man stellt sich vor, dass sich der Rotationskörper aus ‘unendlich vielen, unendlich dünnen Kreisscheiben’ zusammensetzt.

b) Ein etwas zerquetschter Faschingskrapfen entsteht durch Rotation der Kurve $y = \cos x$ um die x-Achse ($-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$). Berechnen Sie sein Volumen.