Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2014/15

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Nachtest (FR, 20.03.2015) *(mit Lösung)*

• **Aufgabe 1.**

a) Untersuchen Sie, ob die Funktionenfolge (f_n), mit $\boxed{f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{(1+\cos^2 x)^n}{n!}}$ *[**a)**: 2.5 P.]* punktweise konvergiert (auf ganz $\mathbb{R}$).

Falls dies zutrifft, leiten Sie zunächst eine obere Schranke für die Grenzfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ her, und geben Sie sodann die Grenzfunktion $f(x)$ explizit an.

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Folge $(f_n(x))$ ist nichtnegativ.

Abschätzung nach oben:

$$|f_n(x)| \;\leq\; \frac{2^n}{n!}$$

mit

$$\frac{2^n}{n!} \;=\; \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdots 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n} \;=\; 2\cdot 1\cdot \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdots\frac{2}{n} \;\leq\; \frac{4}{n} \;\to\; 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

Einschließungsprinzip $\;\Rightarrow\;$ Konvergenz liegt vor für alle $x \in \mathbb{R}$. ✓

Weiters: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-x)^n}{(1+x)^n}}$ konvergent? (Begründung!) *[**b)**: 1.5 P.]*

Geben Sie für den konvergenten Fall auch einen möglichst einfachen Formelausdruck für den Wert der Reihe an.

Geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, konvergent für

$$|q| \;=\; \left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |1-x| < |1+x| \quad\Leftrightarrow\quad (1-x)^2 < (1+x)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 1-2\,x+x^2 < 1+2\,x+x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x > 0$$

Wert der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \;=\; \frac{\dfrac{1-x}{1+x}}{1-\dfrac{1-x}{1+x}} \;=\; \frac{1-x}{2\,x}$$

c) Sei f irgendeine stetig differenzierbare Funktion und x eine feste Stelle im Definitionsbereich von f.

Berechnen Sie den Grenzwert $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{3}{2}\,f(x) - 2\,f(x-h) + \frac{1}{2}\,f(x-2\,h)}{h}}$ *[**c)**: 2 P.]*

Z.B. mittels ‘de l’Hospital’ (0/0) und Kettenregel (Ableitung nach h bei festem x!):

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{2}\,f(x)-2\,f(x-h)+\frac{1}{2}\,f(x-2\,h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{d}{dh}\big(\frac{3}{2}\,f(x)-2\,f(x-h)+\frac{1}{2}\,f(x-2\,h)\big)}{\frac{d}{dh}\,(h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\,\frac{d}{dh}\,f(x-h)+\frac{1}{2}\,\frac{d}{dh}\,f(x-2\,h)}{1}\\
&= \lim_{h\to 0}\big(+2\,f'(x-h)-2\cdot\tfrac{1}{2}\,f'(x-2\,h)\big) \;=\; f'(x)
\end{aligned}$$

• **Aufgabe 2.**

a) Betrachten Sie die Funktion $\boxed{f(x) = \arctan(\frac{1}{x}),\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ *[**a)**: 1.5 P.]*

(i) Beschreiben Sie das Verhalten von $f(x)$ für $x \to 0+$ und $x \to 0-$. Ist f stetig fortsetzbar an $x = 0$?

(ii) Gleiche Frage wie unter (i), für $f'(x)$ anstelle von $f(x)$.

(i) Wegen $\arctan t \to \pm\frac{\pi}{2}$ für $t \to \pm\infty$ gilt

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\dfrac{\pi}{2}\,, \quad \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}\,.$ $\quad f$ nicht stetig fortsetzbar an $x = 0$ (Sprungstelle).

(ii) Mit

$$f'(x) = \frac{-1/x^2}{1 + 1/x^2}$$

gilt

$\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = -1\,, \quad \lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = -1\,.$ $\quad f'$ stetig fortsetzbar an $x = 0$ (hebbare Unstetigkeit).

b) Sei f eine stetige Funktion und $c \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\boxed{\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_c^x f(\xi - c)\,d\xi}$ *[**b)**: 2 P.]*

Mit Substitution $\xi - c = t$:

$$\int_c^x f(\xi - c)\,d\xi \;=\; \int_0^{x-c} f(t)\,dt$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(\xi - c)\,d\xi \;=\; \frac{d}{dx}\int_0^{x-c} f(t)\,dt \;=\; f(x - c),$$

und daher

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_c^x f(\xi - c)\,d\xi \;=\; f'(x - c)$$

c) Betrachten Sie die Funktion $\boxed{f(x) = e^{-x^2},\quad x \in \mathbb{R}}$ *[**c)**: 2.5 P.]*

(i) Geben Sie das Taylor-Polynom $T_2(x)$ vom Grad 2 an der Stelle $x_0 = 0$ an.

(ii) Für $x \neq 0$ verläuft der Graph von T_2 ganz *(?) unterhalb* oder *(?) oberhalb* des Graphen von f? Welche der beiden Aussagen ist richtig? (Genaue Begründung!)

(i) Taylor-Polynom:

$$T_2(x) = 1 - x^2$$

(ii) Für $g(x) := T_2(x) - f(x) = 1 - x^2 - e^{-x^2}$ gilt $g(0) = 0$, und

$$g'(x) \;=\; -2\,x + 2\,x\,e^{-x^2} \;=\; 2\,x\left(e^{-x^2} - 1\right) \;\begin{cases} < 0, & x > 0 \\ > 0, & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$g(x)\;\begin{cases} \text{strikt monoton fallend}, & x > 0 \\ \text{strikt monoton wachsend}, & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Der Graph von $T_2(x)$ verläuft unterhalb des Graphen von $f(x)$.

(Anmerkung: Beide Funktionen sind gerade, es genügt also, $x > 0$ zu betrachten.)

• **Aufgabe 3.** Gegeben sei eine differenzierbare Funktion f, und es wird angenommen, dass die betrachteten Integrale wohldefiniert sind.

a) Sei $-1 \neq c \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie partielle Integration, um für $\boxed{\int f(x)^c\, f'(x)\, dx}$ eine explizite Formel anzugeben (ausgedrückt durch $f(x)$). *[**a)**: 2.5 P.]*

Partielle Integration $\rightsquigarrow$

$$\mathbf{I} = \int \underbrace{f^{\,c}}_{g} f' = \underbrace{f^{\,c}}_{g} f - \int \underbrace{c\, f^{\,c-1} f'}_{g'} f$$

$$= f^{\,c+1} - c \int f^{\,c} f' = f^{\,c+1} - c\,\mathbf{I}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{I} = \int f(x)^c\, f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{c+1}}{c+1} + C$$

b) Gleiche Frage wie unter **a)**, aber mit einer anderen Integrationsmethode. *[**b)**: 2 P.]*

Substitution $f(x) = u,\ f'(x)\, dx = du:$

$$\int f(x)^c\, f'(x)\, dx = \int u^c\, du = \frac{u^{c+1}}{c+1} = \frac{f(x)^{c+1}}{c+1} + C$$

c) Gleiche Frage wie zuvor, aber für $c = -1$. Wählen Sie eine geeignete Vorgangsweise. *[**c)**: 1.5 P.]*

Substitution $f(x) = u,\ f'(x)\, dx = du:$

$$\int f(x)^{-1}\, f'(x)\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|f(x)| + C$$

(sogenanntes logarithmisches Integral).