Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2014/15

# ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

## 1. Übungstest (FR, 7.11.2014) *(mit Lösung)*

---

- **Aufgabe 1.**

**a )** Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{0.0545454545454\ldots}$ *unter Verwendung einer geometrischen Summe* in einen möglichst einfachen Bruch um. *[a): 2.5 P.]*

$$\begin{aligned} 0.0\overline{54} &= \frac{54}{1000} + \frac{54}{100000} + \ldots \\ &= \frac{54}{1000}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right) = \frac{54}{1000}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n \\ &= \frac{54}{1000}\,\frac{1}{1-1/100} = \frac{54}{1000}\,\frac{100}{99} = \frac{54}{990} = \frac{6}{110} = \frac{3}{55} \end{aligned}$$

**b )** Sei $1 \le k < n$. Stellen Sie den Wert des Produktes $\boxed{\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n-k}{k}}$ in Form eines *Binomialkoeffizienten* dar. *[b): 2 P.]*

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n-k}{k} &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)\cdot(n-k-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} = \binom{n-1}{k} \end{aligned}$$

**c )** Der Wert des arithmetischen Ausdruckes $\boxed{1+\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{3}\Big(1+\frac{1}{4}\Big(1+\frac{1}{5}\Big)\Big)\Big)}$ soll in der Form $\boxed{\sum_{n=1}^{5} f(n)}$ ausgedrückt werden. Dabei ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine Funktion.

*Wie lautet der entsprechende Formelausdruck* für $f(n)$? *[c): 1.5 P.]*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \sum_{n=1}^{5} f(n), \quad \text{mit} \quad f(n) = \frac{1}{n!}$$

- **Aufgabe 2.**

**a)** Geben Sie für den Wert der Summe $\boxed{3\sum_{k=1}^{2n} 2^{2(k-1)}}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig, einen *möglichst einfachen Formelausdruck* an. *[a): 3 P.]*

Zurückführen auf geometrische Summe:

$$3\sum_{k=1}^{2n} 2^{2(k-1)} = 3\sum_{k=1}^{2n} 2^{2k-2} = 3\sum_{k=1}^{2n} 2^{2k}\cdot 2^{-2}$$
$$= \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{2n} \left(2^2\right)^k = \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{2n} 4^k = \frac{3}{4}\,\frac{4^{2n+1}-4}{4-1}$$
$$= 4^{2n}-1 = 16^n - 1$$

**b)** Sei $\varepsilon \in (0,1)$. Beweisen Sie, dass die Ungleichung $\boxed{\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\left(1-\varepsilon\right)^{n-k} < 1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. *[b): 3 P.]*

Verwende geometrische Summe:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(1-\varepsilon\right)^{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n}\left(1-\varepsilon\right)^{\ell} = \frac{1-(1-\varepsilon)^{n+1}}{1-(1-\varepsilon)} < \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \checkmark$$

**c)** Snoopy ist (nur) ein Hund und kennt daher die geometrische Summenformel nicht. Daher versucht er die von ihm vermutete Ungleichung $\boxed{\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} < 2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0}$ mittels vollständiger Induktion

zu beweisen. Der Induktionsanfang ist O.K.: Für $n = 0$ ist $1 < 2$.

*Kommentieren Sie die Lage:*

Wird es Snoopy gelingen, ohne weiteres Wissen über geometrische Summen den Induktionsschluss $n \mapsto n+1$ durchzuführen? Formulieren Sie eine Antwort mit Begründung! *[c): **3 Extra-P.**]*

Nein. Die Ungleichung ist richtig, aber der Induktionsschluss $n \mapsto n+1$ funktioniert nicht:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^{-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}}_{<\,2\ \text{(Induktionsannahme)}} + 2^{-(n+1)} < 2 \ ???$$

Die Induktionsannahme enthält keinerlei Information über den konkreten Wert von $\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$ in Abhängigkeit von $n$. Daher ist der Induktionsschluss in dieser Form nicht durchführbar.

• **Aufgabe 3.**

**a)** Sei $\boxed{U := \{n \in \mathbb{N}\colon\, n \text{ ungerade}\}}$, und $f\colon U \to \mathbb{N}$ sei definiert durch $\boxed{f(n) := 2\,n}$ für alle $n \in U$. Zeigen Sie: $\nexists\, n \in U\colon\, f(n)$ *durch 4 teilbar.* *[a): 1 P.]*

Jedes $n \in U$ ist von der Form $n = 2\,k + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0$. Daher:

$$f(n) \;=\; f(2\,k+1) \;=\; 4\,k + 2,$$

ergibt bei Division durch 4 immer den Rest 2. ✓

**b)** Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{1 + 1/n}}\, a_n\,, \quad n \geq 1}$

Entscheiden Sie, ob $\{a_n\}$ eine *Nullfolge* ist. *[b): 2 P.]*

Für $a_{n+1} \;=\; \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, a_n$ gilt

$$a_2 \;=\; \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, a_1 \;=\; \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,, \qquad a_3 \;=\; \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, a_2 \;=\; \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,, \qquad a_4 \;=\; \sqrt{\tfrac{3}{4}}\, a_3 \;=\; \sqrt{\tfrac{1}{4}}\,, \qquad \text{usw.}$$

Also mittels offensichtlichen Induktionsargument:

$$\{a_n\} \;=\; \left\{\sqrt{\frac{1}{n}}\right\} \quad \text{ist Nullfolge.}$$

**c)** Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen, und die Abbildung $f : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{N}$ sei definiert durch $\boxed{f(p,q) \;=\; p\,q\,.}$ *[c): 3 P.]*

(i) Entscheiden Sie, ob $f$ *injektiv* ist. (Begründung!)

(ii) Gleiche Frage wie unter (i), wobei wir jedoch den Definitionsbereich von $f$ einschränken auf $D := \{(p,q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} : \, p \leq q\}$.

(iii) Wir betrachten wieder $f$ gemäß (ii). Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. *Welches Problem muss man lösen um entscheiden zu können, ob $n \in f(D)$ gilt? Wie erhält man daraus $(p,q) \in D$ mit $f(p,q) = n$? Ist dieses Paar $(p,q)$ eindeutig festgelegt?*

(i) nicht injektiv wegen $f(p,q) = f(q,p)$

(ii) injektiv, da Primfaktorzerlegung eindeutig und $p \leq q$ gefordert.

(iii) Man muss die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$ bestimmen.
Für $n = p^2$ ist $n = f(p,p)$ .
Für $n = p\,q$ mit $p < q$ ist $n = f(p,q)$.
In beiden Fällen ist das Urbild eindeutig ($f$ gemäß (ii) ist ja injektiv).

- **Aufgabe 1.**

**a)** Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, a_n\,, \quad n \geq 1}$

Entscheiden Sie, ob $\{a_n\}$ eine *Nullfolge* ist. *[a): 2 P.]*

Für $a_{n+1} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, a_n$ gilt

$$a_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, a_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,, \qquad a_3 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, a_2 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,, \qquad a_4 = \sqrt{\tfrac{3}{4}}\, a_3 = \sqrt{\tfrac{1}{4}}\,, \qquad \text{usw.}$$

Also mittels offensichtlichen Induktionsargument:

$$\{a_n\} = \left\{\sqrt{\frac{1}{n}}\right\} \quad \text{ist Nullfolge.}$$

**b)** Sei $M$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen, und $f:\ M \to \mathbb{N}$ sei definiert durch $\boxed{f(n) := 2\,n}$

für alle $n \in M$. Zeigen Sie: *Die Zahl $f(n)$ ist für kein $n \in M$ durch 4 teilbar.* *[b): 1 P.]*

Jedes $n \in M$ ist von der Form $n = 2\,k + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0$. Daher:

$$f(n) = f(2\,k+1) = 4\,k + 2,$$

ergibt bei Division durch 4 immer den Rest 2. ✓

**c)** Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen, und die Abbildung $g:\ \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{N}$ sei definiert durch

$\boxed{g(m,n) = m\,n\,.}$ *[c): 3 P.]*

(i) Entscheiden Sie, ob $g$ *injektiv* ist. (Begründung!)

(ii) Gleiche Frage wie unter (i), wobei wir jedoch den Definitionsbereich von $g$ einschränken auf $D := \{(m,n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} :\ m \leq n\}$.

(iii) Wir betrachten wieder $g$ gemäß (ii). Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. *Welches Problem muss man lösen um entscheiden zu können, ob $k \in g(D)$ gilt? Wie erhält man daraus $(m,n) \in D$ mit $g(m,n) = k$? Ist dieses Paar $(m,n)$ eindeutig festgelegt?*

(i) nicht injektiv wegen $g(m,n) = g(n,m)$

(ii) injektiv, da Primfaktorzerlegung eindeutig und $m \leq n$ gefordert.

(iii) Man muss die Primfaktorzerlegung von $k \in \mathbb{N}$ bestimmen.
Für $k = m^2$ ist $k = g(m,m)$ .
Für $k = m\,n$ mit $m < n$ ist $k = g(m,n)$.
In beiden Fällen ist das Urbild eindeutig ($g$ gemäß (ii) ist ja injektiv).

- **Aufgabe 2.**

**a)** Der Wert des arithmetischen Ausdruckes $\boxed{1+\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{3}\Big(1+\frac{1}{4}\Big(1+\frac{1}{5}\Big)\Big)\Big)}$ soll in der Form $\boxed{\sum_{n=1}^{5} f(n)}$ ausgedrückt werden. Dabei ist $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ eine Funktion.

*Wie lautet der entsprechende Formelausdruck* für $f(n)$? *[a): 1.5 P.]*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \sum_{n=1}^{5} f(n), \quad \text{mit} \quad f(n) = \frac{1}{n!}$$

**b)** Sei $1 \le k < n$. Stellen Sie den Wert des Produktes $\boxed{\frac{n-1}{k}\cdot\frac{n-2}{k-1}\cdots\frac{n-k}{1}}$ in Form eines *Binomialkoeffizienten* dar. *[b): 2 P.]*

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{k}\cdot\frac{n-2}{k-1}\cdots\frac{n-k}{1} &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!}\\
&= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)\cdot(n-k-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!}\\
&= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} = \binom{n-1}{k}
\end{aligned}$$

**c)** Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{0.0363636363636\ldots}$ *unter Verwendung einer geometrischen Summe* in einen möglichst einfachen Bruch um. *[c): 2.5 P.]*

$$\begin{aligned}
0.0\overline{36} &= \frac{36}{1000}+\frac{36}{100000}+\ldots\\
&= \frac{36}{1000}\Big(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\ldots\Big) = \frac{36}{1000}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{100}\Big)^n\\
&= \frac{36}{1000}\,\frac{1}{1-1/100} = \frac{36}{1000}\,\frac{100}{99} = \frac{36}{990} = \frac{4}{110} = \frac{2}{55}
\end{aligned}$$

- **Aufgabe 3.**

**a )** Sei $\delta \in (0,1)$. Beweisen Sie, dass die Ungleichung $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (1-\delta)^{n-k} < \frac{1}{\delta}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

*[a): 3 P.]*

Verwende geometrische Summe:

$$\sum_{k=0}^{n} (1-\delta)^{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n} (1-\delta)^{\ell} = \frac{1-(1-\delta)^{n+1}}{1-(1-\delta)} < \frac{1}{\delta} \quad \checkmark$$

**b )** Geben Sie für den Wert der Summe $\boxed{3\sum_{j=1}^{2n} 2^{2j-2}}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig, einen *möglichst einfachen Formelausdruck* an.

*[b): 3 P.]*

Zurückführen auf geometrische Summe:

$$\begin{aligned} 3\sum_{j=1}^{2n} 2^{2j-2} &= 3\sum_{j=1}^{2n} 2^{2j} \cdot 2^{-2} \\ &= \frac{3}{4}\sum_{j=1}^{2n} \left(2^2\right)^j = \frac{3}{4}\sum_{j=1}^{2n} 4^j = \frac{3}{4}\,\frac{4^{2n+1}-4}{4-1} \\ &= 4^{2n}-1 = 16^n - 1 \end{aligned}$$

**c )** Garfield vermutet, dass es eine Konstante $C$ gibt, so dass gilt $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}}$.

Er versucht dies mittels vollständiger Induktion zu beweisen. Der Induktionsanfang ist O.K.: Für $n=1$ ist $1 < C$ für beliebige Konstanten $C > 1$.

*Kommentieren Sie die Lage:*

Wird es Garfield gelingen, Induktionsschluss $n \mapsto n+1$ durchzuführen? Formulieren Sie eine Antwort mit Begründung!

*[c): **3 Extra-P**.]*

Nein. Die Aussge ist tatsächlich wahr, aber der Induktionsschluss $n \mapsto n+1$ funktioniert nicht:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}_{< C \ \text{(Induktionsannahme)}} + \frac{1}{(n+1)^2} < C \ \ ???$$

Die Induktionsannahme enthält keinerlei Information über den konkreten Wert der Summe. Daher ist der Induktionsschluss in dieser Form nicht durchführbar, wie immer man auch die Konstante $C > 1$ wählen würde.

- **Aufgabe 1.**

**a)** Geben Sie für den Wert der Summe $\boxed{14 \sum_{k=0}^{n^2-1} 2^{3k-1}}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig, einen *möglichst einfachen Formelausdruck* an. *[a): 3 P.]*

Zurückführen auf geometrische Summe:

$$14 \sum_{k=0}^{n^2-1} 2^{3k-1} = 7 \sum_{k=0}^{n^2-1} (2^3)^k = 7 \sum_{k=0}^{n^2-1} 8^k$$
$$= 7\,\frac{8^{(n^2)}-1}{8-1} = 8^{(n^2)}-1$$

**b)** Sei $c \in (0,1)$. Beweisen Sie, dass die Ungleichung $\boxed{c \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-c)^n}{(1-c)^k} < 1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. *[b): 3 P.]*

Verwende geometrische Summe:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-c)^n}{(1-c)^k} = \sum_{k=0}^{n} (1-c)^{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n} (1-c)^{\ell} = \frac{1-(1-c)^{n+1}}{1-(1-c)} < \frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad \checkmark$$

**c)** Garfield ist (nur) ein Kater und hat daher das Skriptum nicht gelesen. Daher versucht er die von ihm vermutete Ungleichung $\boxed{\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} < 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}}$ mittels vollständiger Induktion zu beweisen. Der Induktionsanfang ist O.K.: Für $n=1$ ist $\frac{1}{2} < 1$.

*Kommentieren Sie die Lage:*

Wird es Garfield gelingen, ohne weiteres Wissen über geometrische Summen den Induktionsschluss $n \mapsto n+1$ durchzuführen? Formulieren Sie eine Antwort mit Begründung! *[c): **3 Extra-P.**]*

Nein. Die Ungleichung ist richtig, aber der Induktionsschluss $n \mapsto n+1$ funktioniert nicht:

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}}_{<\,1 \text{ (Induktionsannahme)}} + 2^{-(n+1)} < 1 \;\; ???$$

Die Induktionsannahme enthält keinerlei Information über den konkreten Wert von $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$ in Abhängigkeit von $n$. Daher ist der Induktionsschluss in dieser Form nicht durchführbar.

• **Aufgabe 2.**

**a)** Sei $\boxed{U := \{n \in \mathbb{N} \colon n \text{ ungerade}\}}$ , und $f \colon U \to \mathbb{N}$ sei definiert durch $\boxed{f(n) := 2\,n + 1}$ für alle $n \in U$. Zeigen Sie: $\nexists\, n \in U \colon f(n)$ *durch 4 teilbar.* *[a): 1 P.]*

Jedes $n \in U$ ist von der Form $n = 2\,k + 1, \quad k \in \mathbb{N}_0$. Daher:

$$f(n) \;=\; f(2\,k+1) \;=\; 4\,k + 3,$$

ergibt bei Division durch 4 immer den Rest 3. ✓

**b)** Die Folge $\{a_n\}$ sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} \cdot a_n\,, \quad n \geq 1}$

Entscheiden Sie, ob $\{a_n\}$ eine *Nullfolge* ist. *[b): 2 P.]*

Für $a_{n+1} \;=\; \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, a_n$ gilt

$$a_2 \;=\; \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, a_1 \;=\; \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,, \qquad a_3 \;=\; \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, a_2 \;=\; \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,, \qquad a_4 \;=\; \sqrt{\tfrac{3}{4}}\, a_3 \;=\; \sqrt{\tfrac{1}{4}}\,, \qquad \text{usw.}$$

Also mittels offensichtlichen Induktionsargument:

$$\{a_n\} \;=\; \left\{\sqrt{\frac{1}{n}}\right\} \quad \text{ist Nullfolge.}$$

**c)** Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen, und die Abbildung $f : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{N}$ sei definiert durch $\boxed{f(x,y) \;=\; x\,y\,.}$ *[c): 3 P.]*

(i) Entscheiden Sie, ob $f$ *injektiv* ist. (Begründung!)

(ii) Gleiche Frage wie unter (i), wobei wir jedoch den Definitionsbereich von $f$ einschränken auf $D := \{(x,y) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P} : \; x \leq y\}\,.$

(iii) Wir betrachten wieder $f$ gemäß (ii). Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. *Welches Problem muss man lösen um entscheiden zu können, ob $n \in f(D)$ gilt? Wie erhält man daraus $(x,y) \in D$ mit $f(x,y) = n$ ? Ist dieses Paar $(x,y)$ eindeutig festgelegt?*

(i) nicht injektiv wegen $f(x,y) = f(y,x)$

(ii) injektiv, da Primfaktorzerlegung eindeutig und $x \leq y$ gefordert.

(iii) Man muss die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$ bestimmen.
Für $n = x^2$ ist $n = f(x,x)$ .
Für $n = x\,y$ mit $x < y$ ist $n = f(x,y)$.
In beiden Fällen ist das Urbild eindeutig ($f$ gemäß (ii) ist ja injektiv).

- **Aufgabe 3.**

**a )** Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{0.0757575\ldots}$ *unter Verwendung einer geometrischen Summe* in einen möglichst einfachen Bruch um. *[a): 2.5 P.]*

$$\begin{aligned} 0.0\overline{75} &= \frac{75}{1000} + \frac{75}{100000} + \ldots \\ &= \frac{75}{1000}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right) = \frac{75}{1000}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n \\ &= \frac{75}{1000}\,\frac{1}{1-1/100} = \frac{75}{1000}\,\frac{100}{99} = \frac{75}{990} = \frac{25}{330} = \frac{5}{66} \end{aligned}$$

**b )** Der Wert des arithmetischen Ausdruckes $\boxed{1+\frac{1}{4}\Big(1+\frac{1}{9}\Big(1+\frac{1}{16}\Big)\Big)}$ soll in der Form $\boxed{\sum_{n=1}^{4} f(n)}$ ausgedrückt werden. Dabei ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine Funktion.

*Wie lautet der entsprechende Formelausdruck* für $f(n)$? *[b): 1.5 P.]*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 9} + \frac{1}{4\cdot 9\cdot 16} = \sum_{n=1}^{4} f(n), \quad \text{mit} \quad f(n) = \frac{1}{(n!)^2}$$

**c )** Sei $1 \leq j < n$. Stellen Sie den Wert des Produktes $\boxed{\frac{n-j}{j}\cdots\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-1}{1}}$ in Form eines *Binomialkoeffizienten* dar. *[c): 2 P.]*

$$\begin{aligned} \frac{n-j}{j}\cdots\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-1}{1} &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-j)}{j!} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-j)\cdot(n-j-1)!}{j!\cdot(n-j-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{j!\,(n-1-j)!} = \binom{n-1}{j} \end{aligned}$$