Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2014/15

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (FR, 9.01.2015) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}}$ konvergiert. *[a): 3 P.]*

Quotientenkriterium (Grenzwertvariante) anwenden:

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\, n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} \to \frac{\frac{1}{e}}{1} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ konvergent

b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\boxed{\frac{1}{x^2+3\,x+2}}$ *[b): 1.5 P.]*

Ansatz (mit Nullstellen -1 und -2 des Nenners):

$$\frac{1}{x^2+3\,x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & 1 = A\,(x+2) + B\,(x+1) \\ x=-1: \quad & 1 = A\,(-1+2) = A \\ x=-2: \quad & 1 = B\,(-2+1) = -B \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{x^2+3\,x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

c) Bestimmen Sie den Wert der konvergenten Reihe $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3\,n+2}}$ *[c): 1.5 P.]*

Teleskopreihe (vgl. **b)**):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3\,n+2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots = 1 \end{aligned}$$

- **Aufgabe 2.**

a) **(i)** Ist die Funktion $\boxed{f(x) = \arctan(\ln x)}$ an der Stelle $x = 0$ rechtsseitig stetig fortsetzbar?

Falls ja, wie lautet der betreffende Funktionswert an der Stelle $x = 0$?

(ii) Gleiche Frage wie unter (i), für $f'(x)$ (geben Sie $f'(x)$ an). *[a): 2 P.]*

(i) Für $x \to 0+$ ist $\ln x \to -\infty \quad \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0+} \arctan(\ln x) = \lim_{t\to -\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}\,,$$ rechtsseitig stetig fortsetzbar an $x = 0$.

(ii) Weiters für $f'(x) = \dfrac{1}{x\,(1+\ln^2 x)}$:

nicht stetig fortsetzbar, mit $\lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$.

b) Ist die Funktion $\boxed{f(x) = x\,e^{-|x|}}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar? (Genaue Begründung!)

[b): 2 P.]

f dargestellt als stückweise definierte Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{x}, & x \le 0 \\ x\,e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$, da stetig an $x = 0$ mit $f(0) = 0$

f' dargestellt als stückweise definierte Funktion:

$$f'(x) = \begin{cases} (1+x)\,e^{x}, & x \le 0 \\ (1-x)\,e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$, da stetig an $x = 0$ mit $f'(0) = 1$

Also: f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

(Anm.: f'' ist nicht mehr stetig an $x = 0$.)

c) Wie lautet die Ableitung der Funktion $\boxed{f(x) = x^{(x^2)}}$? *c): 2 P.]*

Kettenregel anwenden:

$$\frac{d}{dx}\,x^{(x^2)} = \frac{d}{dx}\,e^{(x^2\,\ln x)} = e^{(x^2\,\ln x)}\,\frac{d}{dx}\big(x^2\,\ln x\big) = x^{(x^2)}\,\big(2\,x\,\ln x + x\big)$$

$$= x\,x^{(x^2)}\,\big(2\,\ln x + 1\big) = x^{(1+x^2)}\,\big(2\,\ln x + 1\big)$$

- **Aufgabe 3.**

a) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f(x) = \sin(\pi\, x), \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ ist gegeben durch ein Polynom $p(x)$ von möglichst geringem Grad, das an den Stellen $x = -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}$ mit $f(x)$ übereinstimmt. Geben Sie dieses Polynom an. *a): 3 P.]*

Interpolationsaufgabe: Entweder Lagrange-Darstellung verwenden, oder (einfacher): Ansatz

$$p(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2 \quad \text{(Grad 2)}$$

Die Koeffizienten a, b, c sind durch 3 Forderungen festgelegt:

$$\begin{aligned} -1 \;&=\; f(-\tfrac{1}{2}) \;\stackrel{!}{=}\; p(-\tfrac{1}{2}) \;=\; a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4} \\ 0 \;&=\; f(0) \;\stackrel{!}{=}\; p(0) \;=\; a \\ 1 \;&=\; f(\tfrac{1}{2}) \;\stackrel{!}{=}\; p(\tfrac{1}{2}) \;=\; a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} \end{aligned}$$

Lösung:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2,\; c = 0$$

$\Rightarrow$

$$p(x) \;=\; 2\,x \quad \text{(hat nur Grad 1, da ungerade)}$$

b) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f\colon\ [0, \frac{1}{2}] \to [0, 1], \quad f(x) = \cos(\pi\, x)}$ ist gegeben durch $\boxed{q(x) = 1 - 4\,x^2}$

Kann man daraus auch eine Approximation der Umkehrfunktion von f konstruieren, und wie lauten die beiden Funktionen $f^{-1}(y)$ und $q^{-1}(y)$? Bitte präzise begründen! *b): 3 P.]*

Ebenso wie $f(x) = \cos(\pi x)$ ist die Funktion $q(x) = 1 - 4\,x^2$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ strikt monoton fallend, und $q\colon\ [0, \frac{1}{2}] \to [0, 1]$ ist daher bijektiv.

$\leadsto$ Bestimmung der Umkehrfunktion $q^{-1}(y) \approx f^{-1}(y) = \dfrac{1}{\pi} \arccos y$:

Auflösen der Gleichung $q(x) = y$ nach x für $y \in [0, 1]$:

$$1 - 4\,x^2 \;=\; y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \;=\; \frac{1}{4}\,(1 - y)$$

mit der nichtnegativen Wurzel

$$x \;=\; q^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{1 - y} \;\approx\; f^{-1}(y)$$

• **Aufgabe 1.**

a) Wie lautet die Ableitung der Funktion $\boxed{f(x) = x^{(x^3)}}$? *[a): 2 P.]*

Kettenregel anwenden:

$$\frac{d}{dx}\,x^{(x^3)} \;=\; \frac{d}{dx}\,e^{(x^3\,\ln x)} \;=\; e^{(x^3\,\ln x)}\,\frac{d}{dx}\left(x^3\,\ln x\right) \;=\; x^{(x^3)}\left(3\,x^2\,\ln x + x^2\right)$$

$$=\; x^2\,x^{(x^3)}\left(3\,\ln x + 1\right) \;=\; x^{(2+x^3)}\left(3\,\ln x + 1\right)$$

b) Ist die Funktion $\boxed{f(x) = \sin\left(\mathrm{sgn}(x)\cdot x^2\right)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar? (Genaue Begründung!) *[b): 2 P.]*

f dargestellt als stückweise definierte Funktion:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \sin(-x^2), & x \le 0 \\ \sin(x^2), & x \ge 0 \end{cases} \qquad \text{stetig auf ganz } \mathbb{R}\text{, da stetig an } x=0 \text{ mit } f(0)=0$$

f' dargestellt als stückweise definierte Funktion:

$$f'(x) \;=\; \begin{cases} -2\,x\,\cos(x^2), & x \le 0 \\ 2\,x\,\cos(x^2), & x \ge 0 \end{cases} \qquad \text{stetig auf ganz } \mathbb{R}\text{, da stetig an } x=0 \text{ mit } f'(0)=0$$

Also: f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

(Anm.: f'' ist nicht mehr stetig an $x=0$.)

c) **(i)** Ist die Funktion $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{1+\ln x}}$ an der Stelle $x=0$ rechtsseitig stetig fortsetzbar? Falls ja, wie lautet der betreffende Funktionswert an der Stelle $x=0$?

(ii) Gleiche Frage wie unter (i), für $f'(x)$ (geben Sie $f'(x)$ an). *[c): 2 P.]*

(i) Für $x \to 0+$ ist $\ln x \to -\infty$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{1+\ln x} \;=\; 0, \qquad \text{rechtsseitig stetig fortsetzbar an } x=0.$$

(ii) Weiters für $f'(x) = -\dfrac{1}{x\,(1+\ln x)^2}$:

nicht stetig fortsetzbar, mit $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) \;=\; -\infty$.

- **Aufgabe 2.**

a) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f\colon\ [0,\frac{\pi}{2}] \to [0,1], \quad f(x)=\cos x}$ ist gegeben durch $\boxed{q(x) = 1 - 4\,\frac{x^2}{\pi^2}}$

Kann man daraus auch eine Approximation der Umkehrfunktion von f konstruieren, und wie lauten die beiden Funktionen $f^{-1}(y)$ und $q^{-1}(y)$? Bitte präzise begründen! *a): 3 P.]*

Ebenso wie $f(x) = \cos x$ ist die Funktion $q(x) = 1 - 4\,\frac{x^2}{\pi^2}$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ strikt monoton fallend, und $q\colon\ [0,\frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ ist daher bijektiv.

$\rightsquigarrow$ Bestimmung der Umkehrfunktion $q^{-1}(y) \approx f^{-1}(y) = \arccos y$:

Auflösen der Gleichung $q(x) = y$ nach x für $y \in [0,1]$:

$$1 - 4\,\frac{x^2}{\pi^2} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{\pi^2}{4}\,(1-y)$$

mit der nichtnegativen Wurzel

$$x = q^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}\sqrt{1-y} \approx f^{-1}(y)$$

b) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f(x) = \sin(\pi\,x), \quad x \in [0,1]}$ ist gegeben durch ein Polynom $p(x)$ von möglichst geringem Grad, das an den Stellen $x = 0,\ \frac{1}{2},\ 1$ mit $f(x)$ übereinstimmt. Geben Sie dieses Polynom an. *b): 3 P.]*

Interpolationsaufgabe: Entweder Lagrange-Darstellung verwenden, oder (einfacher): Ansatz

$$p(x) = a + b\,x + c\,x^2 \quad \text{(Grad 2)}$$

Die Koeffizienten a, b, c sind durch 3 Forderungen festgelegt:

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) \stackrel{!}{=} p(0) = a \\ 1 &= f(\tfrac{1}{2}) \stackrel{!}{=} p(\tfrac{1}{2}) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} \\ 0 &= f(1) \stackrel{!}{=} p(1) = a + b + c \end{aligned}$$

Lösung:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -b \quad \Rightarrow \quad b = 4,\ c = -4$$

$\Rightarrow$

$$p(x) = 4\,x - 4\,x^2 = 4\,x\,(1-x)$$

- **Aufgabe 3.**

a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\boxed{\dfrac{1}{x^2+5\,x+6}}$ *[a): 1.5 P.]*

Ansatz (mit Nullstellen -2 und -3 des Nenners):

$$\frac{1}{x^2+5\,x+6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & 1 = A\,(x+3) + B\,(x+2) \\ x=-2: \quad & 1 = A\,(-2+3) = A \\ x=-3: \quad & 1 = B\,(-3+2) = -B \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{x^2+5\,x+6} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

b) Bestimmen Sie den Wert der konvergenten Reihe $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+5\,n+6}}$ *[b): 1.5 P.]*

Teleskopreihe (vgl. **a)**):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+5\,n+6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots = \frac{1}{2}$$

c) Entscheiden Sie, ob die Reihe die Reihe $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{(n^2)}}}$ konvergiert. *[c): 3 P.]*

Quotientenkriterium (Grenzwertvariante) anwenden:

$$\frac{\dfrac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\dfrac{n!}{2^{(n^2)}}} = \frac{(n+1)!\;2^{(n^2)}}{n!\;2^{(n+1)^2}} = \frac{(n+1)\;2^{(n^2)}}{2^{(n^2+2\,n+1)}} = \frac{n+1}{2\cdot 4^n} \to 0 < 1$$

$\Rightarrow$ konvergent

- **Aufgabe 1.**

a) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f(x) = \cos(\pi\, x), \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ ist gegeben durch ein Polynom $p(x)$ von möglichst geringem Grad, das an den Stellen $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ mit $f(x)$ übereinstimmt. Geben Sie dieses Polynom an. *a): 3 P.]*

Interpolationsaufgabe: Entweder Lagrange-Darstellung verwenden, oder (einfacher): Ansatz

$$p(x) \;=\; a + b\,x + c\,x^2 \quad \text{(Grad 2)}$$

Die Koeffizienten a, b, c sind durch 3 Forderungen festgelegt:

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; f(-\tfrac{1}{2}) \;\stackrel{!}{=}\; p(-\tfrac{1}{2}) \;=\; a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4} \\ 1 \;&=\; f(0) \;\stackrel{!}{=}\; p(0) \;=\; a \\ 0 \;&=\; f(\tfrac{1}{2}) \;\stackrel{!}{=}\; p(\tfrac{1}{2}) \;=\; a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} \end{aligned}$$

Lösung:

$$a = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 0,\;\; c = -4$$

$\Rightarrow$

$$p(x) \;=\; 1 - 4\,x^2$$

b) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f\colon\; [0, \frac{1}{2}] \to [0, 1], \quad f(x) = \sin(\pi\, x)}$ ist gegeben durch $\boxed{q(x) = 3\,x - 4\,x^3}$

Wie lautet die Umkehrfunktion von f, und welches Problem muss man lösen, um mittels der Approximation q für f eine Approximation für f^{-1} zu erhalten? Hat dieses Problem eine eindeutige Lösung? Können Sie diese angeben? (Falls nicht, begründen Sie dies.) *b): 3 P.]*

Ebenso wie $f(x) = \sin(\pi\, x)$ ist die Funktion $q(x) = 3\,x - 4\,x^3$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ strikt monoton wachsend, und $q\colon\; [0, \frac{1}{2}] \to [0, 1]$ ist daher bijektiv.

$\rightsquigarrow$ Somit ist die Umkehrfunktion $q^{-1}(y)$ von q eine Approximation für $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{\pi} \arcsin y\,.$

Auflösen der Gleichung $q(x) = y$ nach x für $y \in [0, 1]$:

$$3\,x - 4\,x^3 \;=\; y \quad \Rightarrow \quad x = \,?$$

Dies ist eine kubische Gleichung, die zwar für $y \in [0, 1]$ eine eindeutige Lösung besitzt, welche aber sehr aufwendig zu berechnen ist.

(Anmerkung: Die Lösung lautet

$$q^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{2} \cos\Big(\frac{1}{3} \arctan\Big(\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\Big)\Big) - \frac{1}{2} \sin\Big(\frac{1}{3} \arctan\Big(\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\Big)\Big)$$

D.h., diese Approximation ist ‘komplizierter auszuwerten’ als $f^{-1}(y)$.)

- **Aufgabe 2.**

a) Entscheiden Sie, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2\,n)!}$ konvergiert. *[a): 3 P.]*

Quotientenkriterium anwenden:

$$\frac{\dfrac{(n+1)!}{(2(n+1))!}}{\dfrac{n!}{(2\,n)!}} = \frac{(n+1)!\,(2\,n)!}{n!\,(2\,n+2)!} = \frac{n+1}{(2\,n+1)\,(2\,n+2)} = \frac{1}{2\,(2\,n+1)} < 1 \quad (\to 0)$$

$\Rightarrow$ konvergent

b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{x^2-5\,x+6}$ *[b): 1.5 P.]*

Ansatz (mit Nullstellen 2 und 3 des Nenners):

$$\frac{1}{x^2-5\,x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & 1 = A\,(x-3) + B\,(x-2) \\ x=2: \quad & 1 = A\,(2-3) \quad \Rightarrow \quad A=-1 \\ x=3: \quad & 3 = B\,(3-2) \quad \Rightarrow \quad B=1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{x^2-5\,x+6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$$

c) Bestimmen Sie den Wert der konvergenten Reihe $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-5\,n+6}$ *[c): 1.5 P.]*

Teleskopreihe (vgl. **b)**):

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-5\,n+6} = \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots = 1$$

- **Aufgabe 3.**

a) Ist die Funktion $\boxed{f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}}$ an der Stelle $x = 0$ stetig differenzierbar? (Genaue Begründung!) *[a): 2 P.]*

f dargestellt als stückweise definierte Funktion in einer Umgebuing von 0:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}\,, & x \le 0 \\ \dfrac{x}{1+x}\,, & x \ge 0 \end{cases} \qquad \text{stetig an } x = 0 \text{ mit } f(0) = 0$$

f' dargestellt als stückweise definierte Funktion:

$$f'(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2}\,, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2}\,, & x \ge 0 \end{cases} \qquad \text{stetig an } x = 0 \text{ mit } f'(0) = 1$$

Also: f an der Stelle $x = 0$ stetig differenzierbar.

(Anm.: f'' ist nicht mehr stetig an $x = 0$.)

b) **(i)** Ist die Funktion $\boxed{f(x) = \arctan(x^{-1/2})}$ an der Stelle $x = 0$ rechtsseitig stetig fortsetzbar? Falls ja, wie lautet der betreffende Funktionswert an der Stelle $x = 0$?

(ii) Gleiche Frage wie unter (i), für $f'(x)$ (geben Sie $f'(x)$ an). *[b): 2 P.]*

(i) Für $x \to 0+$ ist $x^{-1/2} \to \infty \quad \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0+} \arctan(x^{-1/2}) \;=\; \lim_{t \to \infty} \arctan(t) \;=\; \frac{\pi}{2}$$

(ii) Weiters für $f'(x) = -\dfrac{1}{2\,x^{1/2}\,(1+x)}$:

nicht stetig fortsetzbar, mit $\lim_{x \to 0+} f'(x) \;=\; -\infty$.

c) Wie lautet die Ableitung der Funktion $\boxed{f(x) = x^{(\ln x)}}$? *c): 2 P.]*

Kettenregel anwenden:

$$\frac{d}{dx}\,x^{(\ln x)} \;=\; \frac{d}{dx}\,e^{(\ln x\,\ln x)} \;=\; x^{(\ln x)}\,\frac{d}{dx}\left((\ln x)^2\right) \;=\; x^{(\ln x)}\,\cdot\,\frac{2\,\ln x}{x}$$