a) Beweisen Sie die Identität (für $\ell \le n$)

$$\boxed{\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}}$$

indem Sie $\ell \in \mathbb{N}_0$ beliebig (aber fest) wählen und Induktion bezüglich n verwenden. Induktionsanfang ist hier $n = \ell$.

b) Behauptung:

$$\boxed{\text{Für beliebige } m, n \in \mathbb{N} \text{ ist } (m+1)^n - 1 \text{ ohne Rest durch } m \text{ teilbar.}}$$

Beweisen Sie diese Behauptung

(i) mittels vollständiger Induktion,

(ii) mittels Zurückführung auf eine bekannte Summenformel.

---

a)
- Induktionsanfang $(n = \ell)$: $\binom{\ell}{\ell} = \binom{\ell+1}{\ell+1} = 1 \quad \checkmark$
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=\ell}^{n+1} \binom{k}{\ell} = \sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} + \binom{n+1}{\ell} \overset{\text{ind}}{=} \binom{n+1}{\ell+1} + \binom{n+1}{\ell} = \binom{n+2}{\ell+1} \quad \checkmark$$

(vgl. Additionstheorem für Binomialkoeffizienten).

b) (i) Induktion über n für beliebiges festes m.

- Induktionsanfang $(n = 1)$: $(m+1)^1 - 1 = m \quad \checkmark$
- Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}
(m+1)^{n+1} - 1 &= \big((m+1)^{n+1} - (m+1)^n\big) + \big((m+1)^n - 1\big) \\
&= (m+1-1)\,(m+1)^n + \big((m+1)^n - 1\big) \\
&\overset{\text{ind}}{=} m \cdot (m+1)^n + m\,k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Auch $(m+1)^{n+1} - 1$ ist ohne Rest durch m teilbar. $\checkmark$

(ii) Mittels geometrischer Summenformel:

$$\frac{(m+1)^n - 1}{m} = \frac{(m+1)^n - 1}{(m+1) - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} (m+1)^k \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

Oder alternativ mittels 'Binomi':

$$(m+1)^n - 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m^k - 1 = \cancel{1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} m^k - \cancel{1} \text{ enthält Faktor } m. \checkmark$$

$\square$

a) Schreiben Sie den Ausdruck ($n \in \mathbb{N}$)

$$\boxed{(x_1 - y_1)\, x_2 \cdots x_n + y_1\, (x_2 - y_2)\, x_3 \cdots x_n + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1}\, (x_n - y_n)}$$

mit Hilfe des Summen- und des Produktsymbols ($\sum$, $\prod$) an.

b) Die offensichtliche Identität $x_1\, x_2 - y_1\, y_2 = (x_1 - y_1)\, x_2 + y_1 (x_2 - y_2)$ verallgemeinert sich wie folgt ($n \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{\text{Für } X_n = x_1 \cdots x_n,\ Y_n = y_1 \cdots y_n \ \text{ gilt } \ X_n - Y_n \ = \text{Summe aus } \mathbf{a)}\,.}$$

Führen Sie zum Beweis dieser Formel den Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ durch.

---

a)

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{j=1}^{i-1} y_j \cdot (x_i - y_i) \cdot \prod_{j=i+1}^{n} x_j \Big)$$

b) Induktionsschluss $n \mapsto n + 1$:

$$\begin{aligned}
X_{n+1} - Y_{n+1} &= X_n\, x_{n+1} - Y_n\, y_{n+1} \\
&= X_n\, x_{n+1} - Y_n\, x_{n+1} + Y_n\, x_{n+1} - Y_n\, y_{n+1} \\
&= \big(X_n - Y_n\big)\, x_{n+1} + Y_n\, \big(x_{n+1} - y_{n+1}\big) \\
&\overset{\text{ind}}{=} \big((x_1 - y_1)\, x_2 \cdots x_n + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1}\, (x_n - y_n)\big) x_{n+1} \\
&\quad + y_1 \cdots y_n\, (x_{n+1} - y_{n+1}) \\
&= (x_1 - y_1)\, x_2 \cdots x_{n+1} + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1}\, (x_n - y_n)\, x_{n+1} \\
&\quad + y_1 \cdots y_n\, (x_{n+1} - y_{n+1}) \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

$\square$

Zwei Varianten des Induktionsprinzips. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

a) *Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen n, und es gelte $A(1)$. Falls man zeigen kann*

$$\forall\, n \geq 2: \quad \exists\, m < n: \quad A(m) \Rightarrow A(n),$$

dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) *Seien $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$ drei Aussagen über natürliche Zahlen n, wobei gelte*

$$A(n) \;\Rightarrow\; B(n) \quad \textit{und} \quad \neg A(n) \;\Rightarrow\; \neg C(n) \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Falls $C(1)$ zutrifft und wenn man zeigen kann dass $B(n-1) \Rightarrow C(n)$ für alle $n > 1$, dann gelten $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

---

a) Die Behauptung ist wahr. Beweis indirekt (Kontraposition):

Annahme, die Behauptung ist falsch:

$$\exists\, n \geq 2: \quad \neg A(n)$$

Laut Voraussetzung muss daher gelten

$$\nexists\, m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}: \quad A(m)$$

$\ldots$ Widerspruch zum Induktionsanfang $A(1)$. ✓

b) Die Behauptung ist wahr. Informeller Beweis:

Laut Voraussetzung gilt

$$A(n) \;\Rightarrow\; B(n) \quad \text{und} \quad C(n) \;\Rightarrow\; A(n) \qquad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N},$$

$$B(n-1) \;\Rightarrow\; C(n) \qquad \text{für alle } \; n \geq 1$$

Daher, startend mit Induktionsvoraussetzung $C(1)$:

$$\begin{aligned} C(1) \;\Rightarrow\; A(1) \;\Rightarrow\; B(1) \;\Rightarrow\; C(2) \\ \Rightarrow\; A(2) \;\Rightarrow\; B(2) \;\Rightarrow\; C(3) \end{aligned}$$

$$\ldots \qquad ✓$$

Ein streng formaler Beweis erfolgt indirekt (vgl. **a)**) bzw. mittels Zurückführung auf die Standardvariante der vollständigen Induktion. $\square$

a) $(*)$ Schreiben Sie die geometrische Summe $\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k}$ in die Form $\boxed{\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell\,(x-1)^\ell}$ um. Wie lauten die betreffenden Koeffizienten a_ℓ?

b) Setzen Sie $x = 1+\varepsilon$, multiplizieren Sie x^{n+1} aus und vereinfachen Sie die geometrische Summenformel $\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}}$ (Darstellung als Polynom in ε). Was passiert für $\varepsilon = 0$ (d.h. $x = 1$)? Ist das immer noch ein unbestimmter Ausdruck?

---

a) 'Binomi' $\rightsquigarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} (x-1+1)^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (x-1)^\ell\, 1^{k-\ell}$$

Doppelsumme:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k} = \sum_{k,\ell\le n,\ \ell\le k} = \sum_{\ell,k\le n,\ k\ge\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k=\ell}^{n}$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{\ell=0}^{n} \left(\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} \right) (x-1)^\ell = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell\,(x-1)^\ell$$

mit (vgl. **1 a)**)

$$a_\ell = \binom{n+1}{\ell+1}$$

b) 'Binomi' für $x = 1+\varepsilon$ $\rightsquigarrow$

$$x^{n+1} - 1 = (1+\varepsilon)^{n+1} - 1 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varepsilon^k - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varepsilon^k$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} (1+\varepsilon)^k = \frac{(1+\varepsilon)^{n+1}-1}{(1+\varepsilon)-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varepsilon^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \varepsilon^k$$

… Polynom in ε.

Beachte: **a)**, **b)** sind eng verwandt. $\square$

Die (bekannte) Formel für den Wert der Summe $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad (n \in \mathbb{N})}$ kann man mittels Induktion beweisen, falls man sie bereits kennt. Ein konstruktiver Weg zur Berechnung dieser Summenformel funktioniert wie folgt:

a) Betrachten Sie den Formelausdruck $F(k) = a\,k^3 + b\,k^2 + c\,k + d$ und bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ so dass $F(k+1) - F(k) = k^2$ für beliebige k. *What about d ?*

Anmerkung: $F(k)$ nennt man die *unbestimmte Summe* (oder auch *diskrete Stammfunktion*) der Folge der Zahlen $f(k) = k^2$.

b) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n} \big(F(k+1) - F(k)\big)$.

c) $(*)$ Was meinen Sie: Funktioniert diese Methode in analoger Weise zur Berechnung von $\sum_{k=1}^{n} k^p$ $(p \in \mathbb{N}$ beliebig$)$? Wie berechnet sich die betreffende unbestimmte Summe?

(Sie sollen hier nur das 'Muster' erkennen, ohne streng formal zu argumentieren.)

d) Wie lautet die unbestimmte Summe der geometrischen Folge $f(k) = x^k$ $(k \in N)$? (Dabei ist $x \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl.)

---

a) Ansatz $F(k) = a\,k^3 + b\,k^2 + c\,k + d \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
F(k+1) - F(k) &= \big(a\,(k+1)^3 + b\,(k+1)^2 + c\,(k+1) + \cancel{d}\big) \\
&\quad - \big(a\,k^3 + b\,k^2 + c\,k + \cancel{d}\big) \\
&= a\,\big((k+1)^3 - k^3\big) + b\,\big((k+1)^2 - k^2\big) + c\,\big((k+1) - k\big) \\
&= a\,\big(3\,k^2 + 3\,k + 1\big) + b\,\big(2\,k + 1\big) + c\,\big(1\big) \\
&= 3\,a\,k^2 + \big(3\,a + 2\,b\big)\,k + \big(a + b + c\big) \overset{!}{\equiv} k^2\,(\,+\,0 \cdot k^1 + 0 \cdot k^0)
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bei $k^2,\ k^1,\ k^0 \quad \rightsquigarrow$

$$3\,a = 1\,, \quad 3\,a + 2\,b = 0\,, \quad a + b + c = 0\,,$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}\,, \qquad b = -\frac{1}{2}\,, \qquad c = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad F(k) = \frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + d\,, \quad d \text{ beliebig.}$$

$\longrightarrow$

b) $\rightsquigarrow$ Teleskopsumme:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \big(F(k+1) - F(k)\big) = F(n+1) - F(1)$$
$$= \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} + d - d = \ldots$$
$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2\,n+1)$$

Analog berechnet man die einfachere ‘Gauß’sche Summe’:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\, n(n+1)$$

c) Allgemein für $\sum k^p \; (p \in \mathbb{N})$:

- Ansatz $F(k) = a_{p+1}\, k^{p+1} + a_p\, k^p + \ldots + a_1\, k + a_0$
- Multipliziere $F(k+1) - F(k)$ aus (mittels Binomi), ordne nach Potenzen von k
- Koeffizientenvergleich für $F(k+1) - F(k) \stackrel{!}{=} k^p$
- $\rightsquigarrow$ gestaffeltes lineares Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten a_j :

  Bestimme zunächst a_{p+1}, daraus a_p, usw., zuletzt a_1.
  Die ‘Summationskonstante’ $a_0 = d$ ist beliebig.
- Man kann beweisen, dass dieses Gleichungssystem für jedes $p \in \mathbb{N}$ immer eine eindeutige Lösung besitzt (etwas mehr Arbeit).

d) Geometrische Folge x^k : $F(k)$ ‘errät’ man aus der geometrischen Summenformel:

Für $F(k) = \dfrac{x^k}{x-1} + d$ gilt $F(k+1) - F(k) = x^k \quad (x \neq 1)$.

Spezialfall $x = 1$: $F(k) = k + d$.

$\square$

a) Seien A und B zwei beliebige Mengen, und für jedes $x \in A$ gelte $x \notin B$, d.h. $\boxed{\forall\, x \in A : \; x \notin B}$

Drücken Sie diese Eigenschaft mit Hilfe von $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, ... (oder was auch immer) aus.

b) Unter der Annahme, dass **a)** gilt: Was folgt dann aus $x \in B$?

c) Wie lautet die logische Umkehrung der Aussage aus **a)** ?

d) Gleiche Fragen wie unter **a)** – **c)**, mit $\exists$ anstelle von $\forall$.

---

a) 'Kein Element von A ist in B enthalten', d.h. $A \cap B = \emptyset$

b) Aussage ist logisch äquivalent zu

$$x \in A \;\Rightarrow\; x \notin B \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in B \;\Rightarrow\; x \notin A$$

Das ist dieselbe Aussage, mit vertauschten Rollen von A und B.

c) Logische Umkehrung:

$$\exists\, x \in A \;:\; x \in B\,,$$

daher $A \cap B \neq \emptyset$.

d) $\boxed{\exists\, x \in A : \; x \notin B}$

- Es gibt (mindestens) ein Element in A, das nicht in B enthalten ist, d.h. $A \not\subseteq B$.
- Aus der Aussage folgt für $x \in B$ *nichts* .
- Logische Umkehrung:

$$\forall\, x \in A \;:\; x \in B\,,$$

daher $A \subseteq B$.

$\square$

a) Für zwei Mengen A, B bezeichnet $\boxed{A \triangle B}$ die Menge derjenigen Elemente aus A oder B, die nicht in beiden Mengen enthalten sind.

Drücken Sie $A \triangle B$

(i) in der Form $\ldots \setminus \ldots$, (ii) in der Form $\ldots \cup \ldots$

aus.

b) Unter einer *Partition* einer gegebenen Menge A versteht man eine Menge aus Teilmengen $A_i \subseteq A$, $i \in I$, die *paarweise disjunkt* sind und deren Vereinigung gleich A ist: $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$.

(Dabei bedeutet 'paarweise disjunkt, dass gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die Indexmenge I könnte z.B. endlich sein, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, oder auch unendlich, z.B. $I = \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{R}$. Zu jedem $i \in I$ gehört genau ein A_i, d.h., die Abbildung $i \mapsto A_i$ definiert die Familie.)

$\rightsquigarrow$ Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Geben Sie eine einfache Partitionierung von $A = \mathbb{N}_0$ an, mit Indexmenge $I = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Stellen Sie die A_i in der Form $\{n \in \mathbb{N}_0 : \ldots\}$ dar (deskriptive Methode), und geben Sie einen Algorithmus (d.h. eine Rechenvorschrift) an, der bestimmt, in welchem der A_i eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ enthalten ist.

---

a) 'Symmetrische Mengendifferenz' :

$$A \triangle B \;=\; (A \cup B) \setminus (A \cap B) \;=\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

b) Z.B.:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{0,\ k,\ 2\,k,\ 3\,k,\ \ldots\}\,, \\ A_1 &= \{1,\ k+1,\ 2\,k+1,\ 3\,k+1,\ \ldots\}\,, \\ &\ \vdots \\ A_{k-1} &= \{k-1,\ 2\,k-1,\ 3\,k-1,\ 4\,k-1,\ \ldots\}\,, \end{aligned}$$

Deskriptive Darstellung:

$$A_i \;=\; \{n \in \mathbb{N}_0 : \underbrace{n \bmod k}_{\text{Rest bei Division durch } k} = i\}\,, \quad i = 0 \ldots k-1$$

Die A_i nennt man *Restklassen* mod k.

Algorithmus:

Für gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ bestimme Index i als Rest bei der Division n/k. $\square$

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $\boxed{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad f(n) = \dfrac{n-1}{n+1}}$ **b)** $\boxed{f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x + \dfrac{1}{x}}$

---

a)

- f ist injektiv:

$$\begin{aligned} f(n) = f(m) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n-1}{n+1} = \frac{m-1}{m+1} \\ &\Leftrightarrow \quad (n-1)(m+1) = (m-1)(n+1) \\ &\Leftrightarrow \quad nm + n - m - 1 = mn + m - n - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad n - m = m - n \quad \Leftrightarrow \quad n - m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = m \end{aligned}$$

  Oder: Man argumentiert, dass f strikt monoton wachsend ist, d.h.

$$f(n+1) = \frac{n}{n+2} > \frac{n-1}{n+1} = f(n)$$

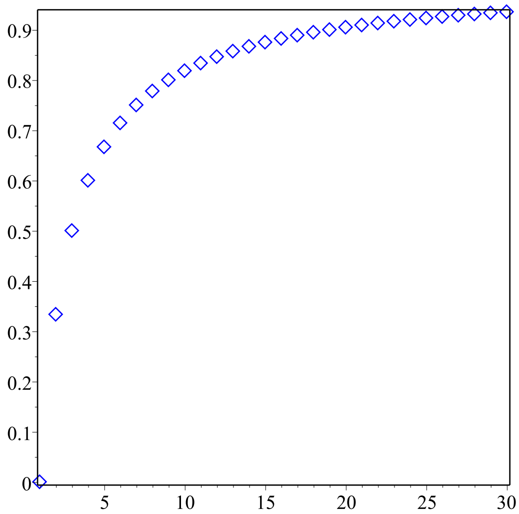
  wegen

$$\underbrace{n(n+1)}_{n^2+n} > \underbrace{(n-1)(n+2)}_{n^2+n-2} .$$

  Oder ganz direkt:

$$f(n) = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \quad \text{strikt monoton wachsend.}$$

- f ist nicht surjektiv, weil nicht alle $y \in \mathbb{Q}$ als Funktionswert angenommen werden.



$\longrightarrow$

b) • f nicht surjektiv wegen $f(x) > \max\{x, 1/x\} \geq 1$ für alle $x > 0$

• f nicht injektiv wegen $f(x) = f(1/x)$

Oder Injektivität direkt gemäß Definition nachprüfen:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1\, x_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \ \underline{\text{oder}} \ x_1\, x_2 = 1, \text{ d.h. } x_2 = 1/x_1\,.$$

• Alternativ mittels Rechnung: Sei $y > 0$. Die Gleichung $f(x) = y$, d.h.

$$x + \frac{1}{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x\,y + 1 = 0 \qquad (x \text{ kann nicht } 0 \text{ sein})$$

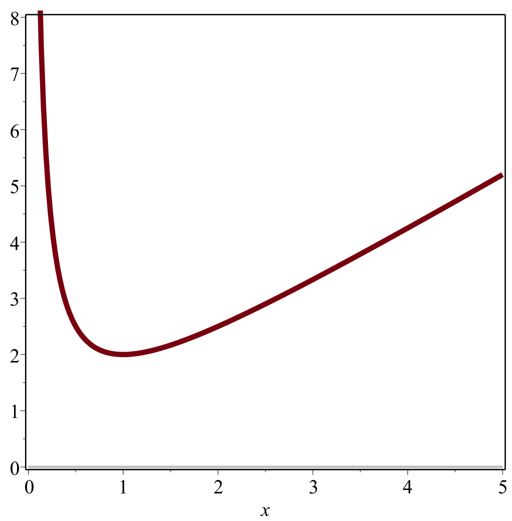
hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 4}$$

– $y < 2$: keine reelle Lösung $\Rightarrow$ f nicht surjektiv

– $y > 2$: zwei positive Lösungen $x_{1,2}$ $\Rightarrow$ f nicht injektiv

Anmerkung: Es gilt $f(x) \geq 2$ für alle $x > 0$.



$\square$

Angenommen, A, B und C seien Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Ist $g \circ f$ injektiv, dann muss auch f injektiv sein.

b) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann muss auch g surjektiv sein.

c) Ist $g \circ f$ bijektiv, dann ist g surjektiv und f injektiv.

---

a) Laut Voraussetzung ($g \circ f$ injektiv) gilt:

$$a_1,\, a_2 \in A \;\text{ mit }\; (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2$$

Nun: Nehme an $f(a_1) = f(a_2) \quad \Rightarrow$

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 \quad \checkmark$$

Also ist f injektiv.

b) Laut Voraussetzung ($g \circ f$ surjektiv) gilt:

$$\forall\, c \in C \;\; \exists\, a \in A \;\text{ mit }\; (g \circ f)(a) = c, \quad d.h.\; g(f(a)) = c$$

$\Rightarrow$

$$\text{Für } \; b = f(a) \in B \;\text{ gilt }\; g(b) = c \quad \checkmark$$

Also ist g surjektiv.

c) Direkte Folgerung aus **a)** und **b)**.

$\square$

a) Eine Bakterienkultur wächst pro Minute um 10%. Um 3:00 beträgt die Population 1 Milliarde Bakterien. Wie viele sind es um 4:00? Wie viele waren es um 0:00, als die Kultur aufgesetzt wurde?

Kommentieren Sie auch die Tatsache, dass sich bei der Rechnung keine natürlichen Zahlen ergeben, also streng genommen keine 'Anzahl' von Bakterien.

b) Geben Sie für die unter **a)** betrachtete Situation eine allgemeine Formel an: Anzahl der Bakterien = $A(n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der seit 0:00 (Startzeitpunkt) vergangenen *Sekunden* ist. Wie lautet die Formel für $A(n)$?

---

a) Wachstum um 10% in einer Minute bedeutet

$$B_{1\,\mathrm{min.}} = 1.1 \cdot B_{0\,\mathrm{min.}}$$

$\Longrightarrow$

nach Ablauf einer Stunde (60 min. zwischen 3:00 und 4:00):

$$B_{4:00} = (1.1)^{60} \cdot B_{3:00} \approx 304.5 \cdot 10^9 \approx 3 \cdot 10^{11}$$

und

$$B_{0:00} = (1.1)^{-180} B_{3:00} \approx 3.5 \cdot 10^{-8} \cdot 10^9 \approx 35.4$$

Das sind keine Rechnungen mit natürlichen Zahlen. Das mathematische Modell schätzt die Population mittels reeller Größen.

b) Annahme: Wachstum ist gleichmäßig über die Zeit $\Longrightarrow$

$$B_{1\,\mathrm{sec.}} = c \cdot B_{0\,\mathrm{sec.}}$$

mit

$$c^{60} = 1.1\,, \quad \text{d.h.} \quad c = 1.1^{1/60} = \sqrt[60]{1.1} \approx 1.0016$$

Dann:

$$B_{n\,\mathrm{sec.}} = c^n \cdot B_{0\,\mathrm{sec.}}$$

$\square$