**a)** Für $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ und $c < d$ definieren wir die Intervalle

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{Q} : a \le x \le b\}, \quad [c, d] = \{x \in \mathbb{Q} : c \le x \le d\}.$$

Geben Sie zwei möglichst einfache bijektive Abbildungen $f : [a, b] \to [c, d]$ und ihre Umkehrfunktionen $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ an,

(i) mit $f(a) = c, \ f(b) = d$, (ii) mit $f(a) = d, \ f(b) = c$.

**b)** Seien $A$, $B$ endliche gleichmächtige Mengen und $f : A \to B$. Zeigen Sie:

$$\boxed{f \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijektiv}}$$

**c)** Wieviele bijektive Abbildungen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ auf sich selbst gibt es, und wie beweist man das? Beschreiben Sie diese Abbildungen in Worten.

---

**a)** [Skizze:] affin rational, wachsend bzw. fallend:

(i) $$f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a) = d\,\frac{x-a}{b-a} + c\,\frac{b-x}{b-a}$$

…'Konvexkombination' von $c$ und $d$ (Koeffizienten $x$-abhängig, Summe 1).

Umkehrfunktion: analog; vertausche $a \leftrightarrow c$, $b \leftrightarrow d$:

$$f^{-1}(y) = a + \frac{b-a}{d-c}(y-c) = b\,\frac{y-c}{d-c} + a\,\frac{d-y}{d-c}$$

sowie:

(ii) $$f(x) = d - \frac{d-c}{b-a}(x-a) = c\,\frac{x-a}{b-a} + d\,\frac{b-x}{b-a}$$

…Konvexkombination von $c$ und $d$.

Umkehrfunktion: analog; vertausche $a \leftrightarrow d$, $b \leftrightarrow c$:

$$f^{-1}(y) = a - \frac{b-a}{d-c}(y-d) = a\,\frac{y-c}{d-c} + b\,\frac{d-y}{d-c}$$

**b)** [Skizze:] Sei $n = |A| = |B|$:

$$f \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad |f(A)| = n \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjektiv}$$

$\Rightarrow$ Beide sind auch äquivalent zu '$f$ bijektiv'.

**c)** Alle möglichen Umordnungen (Permutationen), Anzahl $= n!$

Beweis: Induktion, oder ganz direkt:

Wähle $f(1)$: $n$ Möglichkeiten

Wähle $f(2)$: jetzt noch $n-1$ Möglichkeiten

Wähle $f(3)$: jetzt nur noch $n-2$ Möglichkeiten, usw. ✓ □

Gegeben sei die reelle Funktion $\boxed{f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}}$

Dabei bedeutet $\sqrt{x}$ wie üblich die positive Wurzel aus $x \geq 0$.

**a)** Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f$.

**b)** Geben Sie $y \geq 0$ vor und lösen Sie die Gleichung $f(x) = y$ nach $x$ auf. Interpretieren Sie das Ergebnis.

**c)** Überprüfen Sie nochmals Ihr Ergebnis[a] aus **b)** und überlegen Sie, für welche Werte von $y$ der betreffende Wert von $x$ überhaupt wohldefiniert ist (als reelle Zahl). Was folgern Sie daraus?

---

**a)** Alle Wurzelausdrücke müssen wohldefiniert (✓) sein, d.h., ihre Argumente müssen $\geq 0$ sein:

$$\sqrt{3-x} \;\checkmark \quad \text{für} \quad x \leq 3, \qquad \text{mit} \quad y := \sqrt{3-x} \geq 0$$
$$\sqrt{2-y} \;\checkmark \quad \text{für} \quad y \leq 2, \qquad \text{mit} \quad z := \sqrt{2-y} \geq 0$$
$$\sqrt{1-z} \;\checkmark \quad \text{für} \quad z \leq 1, \qquad \text{mit} \quad f(x) = \sqrt{1-z} \geq 0$$

$\Rightarrow \quad x \in D(f)$ erfordert

$$x \leq 3\,,$$

und: $\quad \sqrt{3-x} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1$

und: $\quad \sqrt{2 - \sqrt{3-x}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - \sqrt{3-x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3-x} \geq 1$

$\quad \Leftrightarrow \quad 3 - x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2$

$\Rightarrow$

$$-1 \leq x \leq 2\,, \quad \text{d.h.} \quad D(f) = [-1, 2]$$

$\longrightarrow$

[a] Falls Sie unter **b)** bereits sorgfältig und korrekt vorgegangen sind, haben Sie **c)** bereits vorweggenommen.

**b)** Auflösen der Gleichung $f(x) = y$ nach $x$ mittels mehrfach Quadrieren und Umformen:

$$\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}} \;=\; y \geq 0$$

$$1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}} \;=\; y^2 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2-\sqrt{3-x}} \;=\; 1-y^2$$

$$2-\sqrt{3-x} \;=\; \left(1-y^2\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3-x} \;=\; 2-\left(1-y^2\right)^2$$

$$3-x \;=\; \left(2-\left(1-y^2\right)^2\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x \;=\; 3-\left(2-\left(1-y^2\right)^2\right)^2$$

**c)** Rechnung in **b)**: Alle Wurzelausdrücke müssen $\geq 0$ sein:

$$\begin{array}{ll} & y \geq 0 \\ \text{und:} & 1-y^2 \;\geq\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad y \;\leq\; 1 \\ \text{und:} & 2-\left(1-y^2\right)^2 \;\geq\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(1-y^2\right)^2 \leq 2 \end{array}$$

Also: $y \in [0,1]$, und dann ist die dritte Forderung automatisch erfüllt.

$\Rightarrow$

$$\text{Bild } f(D(f)) \;=\; f([-1,2]) \;=\; [0,1]$$

- $\forall\, y \in [0,1]$ ist die Gleichung $f(x) = y$ eindeutig nach $x$ auflösbar.
- $f\colon\ [-1,2] \to [0,1]$ bijektiv, mit $f^{-1}$ gemäß **b)**.

$\square$

**a)** Wandeln Sie den periodischen Dezimalbruch

$$\boxed{0.074074074074074074074074\ldots}$$

in rationale Darstellung um.

**b)** Geben Sie die Dezimaldarstellung der rationalen Zahl $\boxed{\dfrac{10}{33}}$ an.

---

**a)** Mittels geometrischer Summe:

Achte auf Periodenlänge (hier: 3 ohne 'Vorlauf')

$$0.074074074074074074074074\ldots = 0.\overline{074} = 0.074 \cdot \left(1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \ldots\right)$$

$$= \frac{74}{1000} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-3}} = \frac{74}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = \frac{74}{999} = \frac{2 \cdot 37}{27 \cdot 37} = \frac{2}{27}$$

**b)** Ganzzahlige Division mit Rest, Periode diagnostizieren:

```
      10     /  33  =  0.303...
      100
   -   99
      ---
        10
        100
```

$\Longrightarrow$

$$\frac{10}{33} = 0.303030\ldots = 0.\overline{30}$$

$\square$

**a)** Welche Zahl wird durch die *binäre* Darstellung $0.\overline{1}$ repräsentiert?

**b)** Wandeln Sie die Dezimalzahl 0.1 in Binärdarstellung um.

Hinweis: Division in Binärarithmetik. (Ungewohnt, funktioniert jedoch analog wie in Dezimalarithmetik.)

**c)** Zeigen Sie: Jede endliche Binärzahl besitzt eine endliche Dezimaldarstellung. (Die Umkehrung gilt nicht; siehe **b)**.)

---

**a)** Binärentwicklung entspricht geometrischer Reihe:

$$0.\overline{1} = 0.111\ldots = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

**b)** Division in Binärarithmetik ($10 = 1010$ binär)

```
    1     /   1010  =  0.00011...
    10
    100
    1000
    10000
 -   1010
    ------
     01100
 -    1010
    -------
       0100
```

$\Rightarrow$ $0.1 = 0.0\overline{0011}$ – periodischer Binärbruch.

Dies entspricht der geometrischen Reihe (binär $0.0011 = 3/16$):

$$0.1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{16} + \frac{3}{16^2} + \frac{3}{16^3} + \ldots\right) = \frac{3}{2}\,\frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{15} = \frac{1}{10}\,.$$

**c)** Wegen

$$\tfrac{1}{2} = 0.5 = \text{endlicher Dezimalbruch}$$

gilt auch

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 0.5^n = \text{endlicher Dezimalbruch für alle } n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ Behauptung. ✓

$\square$

Welche Folgen $(a_n)$ konvergieren? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert.

**a)** $\boxed{a_n = \dfrac{1 - 5\,n^4}{n^4 + 8\,n^3}}$

**b)** $\boxed{a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\,n - 1}}$

**c)** $\boxed{a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{k-n}}$

**d)** $\boxed{a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{-k}}$

**e)** $\boxed{a_n = \dfrac{2 + n}{2 + n\,(-1)^n}}$

**f)** $\boxed{a_n = \text{Produkt der Folgenelemente aus } \textbf{d)} \text{ und } \textbf{e)}}$

---

Verwende Rechenregeln für konvergente Folgen, Einschließungsprinzip, etc.

**a)** Offenbar gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = -5$. Genauer:

$$\frac{1 - 5\,n^4}{n^4 + 8\,n^3} = \frac{\frac{1}{n^4} - 5}{1 + \frac{8}{n}} \to -5 \qquad \checkmark$$

**b)** $(a_n)$ ist eine Nullfolge, da $(|a_n|)$ eine Nullfolge ist.

Bzw.: $(-|a_n|)$ und $(|a_n|)$ sind Nullfolgen – Einschließungsprinzip.

**c)** In den $a_n$ steckt geometrische Summe:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{k-n} = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{-n}\,\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2 - 2^{-n}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

Alternative Variante:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{k-n} = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \quad \text{usw.}$$

$\longrightarrow$

**d)** 'Binomi' :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{k} \cdot 1^{n-k} = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2^n}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

**e)** Die Folge $(a_n)$, mit

$$a_n = \frac{2+n}{2+n\,(-1)^n} = \frac{\frac{2}{n}+1}{\frac{2}{n}+(-1)^n}$$

ist oszillatorisch und hat die zwei Häufungspunkte 1 und $-1$. Divergent.

**f)** $a_n =$ Produkt der Folgenelemente aus **d)** und **e)**

- Folge aus **d)** ist Nullfolge
- Folge aus **e)** ist divergent, jedoch beschränkt (2 endliche Häufungspunkte!)

Einschließungsprinzip $\Rightarrow$ $(a_n)$ ist Nullfolge.

$\square$

**a)** Für eine Folge $(a_n)$ reeller Zahlen gelte

$$\boxed{\exists\, K \in \mathbb{N}: \ \forall\, n \geq K: \ |a_n - a_{n-1}| \leq c^n}$$

für eine Konstante $c$, $0 < c < 1$. Zeigen Sie: Die Folge ist konvergent.

**b)** Die beiden Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ seien definiert als die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\boxed{x^2 - n\,x + 1 = 0 \quad (n \in \mathbb{N})}$$

Studieren Sie die Konvergenz dieser Folgen sowie die Konvergenz der Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n\, b_n)$.

---

**a)** Wir zeigen: $(a_n)$ ist eine *Cauchyfolge.*

$\rightsquigarrow$ Für hinreichend große $m > n \geq K$ gilt laut Voraussetzung (verwende Dreicksungleichung):

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| \ &\leq \ |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \ldots + |a_m - a_{m-1}| \\
&\leq \ c^{n+1} + c^{n+2} + \ldots + c^m \\
&= \ c^{n+1} \left(1 + c + \ldots + c^{m-n-1}\right) \\
&\leq \ c^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} c^k \ = \ \frac{c^{n+1}}{1-c}
\end{aligned}$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ wähle $N = N(\varepsilon) \geq K$ so dass

$$\frac{c^{n+1}}{1-c} \leq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N$$

Dies ist immer möglich, da $\left(\frac{c^{n+1}}{1-c}\right)$ eine Nullfolge ist.

$\Rightarrow$ $(a_n)$ ist Cauchyfolge $\Rightarrow$ $(a_n)$ ist konvergent.

**b)** Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$a_n \ = \ \frac{n}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}\right), \qquad b_n \ = \ \frac{n}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}\right)$$

mit $\sqrt{1 - \frac{4}{n^2}} \to 1$ für $n \to \infty$. Daraus folgt:

- $a_n$ divergent
- $b_n$ ist Nullfolge (erkennt man mittels Umformung $1 - \sqrt{X} = \frac{1-X}{1+\sqrt{X}}$)
- $a_n + b_n = n$ divergent
- $a_n\, b_n \equiv 1$ konstant.

$\square$

Unter dem *Limes superior* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ bzw. dem *Limes inferior* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ einer Folge $(a_n)$ versteht man deren größten bzw. kleinsten Häufungspunkt.

Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ (falls diese existieren) für die Folgen

**a)** $\boxed{a_n \;=\; 1 + (-1)^n + 2^{-n}}$

**b)** $\boxed{a_n \;=\; 2^n}$

**c)** Folge aus **5 e)**

*Zusatzfrage:* Wie charakterisiert man Konvergenz einer Folge mittels lim sup und lim inf ?

---

**a)** Oszillierende Folge, überlagert mit Nullfolge:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \;=\; 2\,, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n \;=\; 0$$

Teilfolgenkonvergenz:

$$a_{2n} \;\to\; 2, \quad a_{2n-1} \;\to\; 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty\,.$$

**b)** Die Folge besitzt keinen Häufungspunkt.

Allenfalls:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n \;=\; +\infty$$

im Sinne der bestimmten Divergenz (Konvergenz gegen $+\infty$).

**c)** $a_n = \dfrac{2+n}{2+n\,(-1)^n}$

- $n$ gerade : $a_n \;\equiv\; 1$
- $n$ ungerade $a_n \;=\; \dfrac{2+n}{2-n} \;=\; \dfrac{1+2/n}{-1+2/n} \;\to\; -1\,, \quad n\to\infty$

$\rightsquigarrow$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \;=\; 1\,, \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n \;=\; -1$$

mit entsprechender Teilfolgenkonvergenz.

- Konvergenz $\quad\Leftrightarrow\quad$ lim sup, lim inf existieren und sind identisch. $\square$

Sei $c > 0$ vorgegeben. Durch die Rekursion

$$\boxed{a_1 = c \quad \text{und} \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}\,, \quad n \geq 2}$$

ist eine Folge $(a_n)$ reeller Zahlen definiert.

**a)** Geben Sie alle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ an, die als Grenzwert dieser Folge infrage kommen.

**b)** Stellen Sie eine Vermutung darüber an, wie die $a_n$ aussehen, und beweisen Sie Ihre Vermutung.

**c)** Entscheiden Sie die Frage nach der Konvergenz in Abhängigkeit von dem Startwert $c$ und geben Sie ggf. den Grenzwert an.

---

**a)** Falls $(a_n)$ konvergent gegen $a$:

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ und der rekursiven Definition folgt die 'Fixpunktgleichung'

$$a = \frac{a}{1+a}$$

Da $a = -1$ keine Lösung ist, dürfen wir die Gleichung mit $1 + a \neq 0$ multiplizieren:

$$a\,(1+a) = a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

Falls $(a_n)$ konvergiert, kann es sich nur um eine Nullfolge handeln.

**b)** Rechnen:

$$a_1 = c$$

$$a_2 = \frac{c}{1+c}$$

$$a_3 = \frac{\frac{c}{1+c}}{1 + \frac{c}{1+c}} = \frac{c}{1+2\,c}$$

usw. Ein einfaches Induktionsargument zeigt:

$$a_n = \frac{c}{1+(n-1)\,c} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

**c)** $(a_n)$ ist tatsächlich eine Nullfolge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{1+(n-1)\,c} = 0\,,$$

da Nenner bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. $\square$

($*$) Wir betrachten zwei rekursiv definierte Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$. Die beiden Folgen sind jedoch nicht unabhängig voneinander: Für gegebene Startwerte $a_1$, $b_1$ sei

$$\boxed{\begin{aligned} a_{n+1} &= c\left(a_n + b_n\right), \\ b_{n+1} &= c\left(a_n - b_n\right) \end{aligned}}$$

für $n \geq 1$, mit einem festen Parameter $c > 0$. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, dass alle auftretenden Folgenglieder $a_n$ und $b_n$ positiv sind.

**a)** Geben Sie – in Abhängigkeit von dem Parameter $c$ – alle möglichen Paare $(a, b)$ and, die als Grenzwert in Frage kommen. D.h.: Falls sowohl $(a_n)$ als auch $(b_n)$ konvergieren, dann kommen für den Grenzwert $(a, b)$ nur bestimmte Werte infrage.

**b)** Geben Sie Wertebereiche für den Parameter $c$ an, so dass beide Folgen entweder sicher konvergieren oder aber mindestens eine von ihnen divergieren muss.

*Hinweis:* Betrachten Sie die Folge $(a_n^2 + b_n^2)$.

**c)** Was passiert im Grenzfall, d.h. für denjenigen Wert von $c$, der den Konvergenzbereich vom Divergenzbereich abgrenzt?

---

Vektorwertige Folge!

**a)** Grenzwert $(a, b)$ muss ein *Fixpunkt der Rekursion* sein:

$$\begin{aligned} a &= c\,(a+b) \\ b &= c\,(a-b) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} (1-c)\,a - c\,b &= 0 \\ -c\,a + (1+c)\,b &= 0 \end{aligned}$$

Determinante: $\det = (1-c)(1+c) - c^2 \; = \; 1 - 2\,c^2$. 2 Fälle:

(i) $c \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\det \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (a, b) = (0, 0)$ einziger möglicher Grenzwert

(ii) $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\det \; = \; 0$, Gleichungssystem reduziert sich zu einer einzigen Gleichung, Lösung nicht eindeutig:

$$\left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) a \; = \; \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, b$$

$\Rightarrow$

$$a \text{ beliebig}, \qquad b \; = \; \left(\sqrt{2} - 1\right) a$$

Die möglichen Fixpunkte liegen auf einer Geraden.

$\longrightarrow$

**b)** Rekursion für Folge $(a_n^2 + b_n^2)$ :

$$\begin{aligned}(a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2) &= c^2\left((a_n+b_n)^2 + (a_n-b_n)^2\right)\\ &= c^2\left(a_n^2 + \cancel{2\,a_n\,b_n} + b_n^2 \;+\; a_n^2 - \cancel{2\,a_n\,b_n} + b_n^2\right)\\ &= 2\,c^2\,(a_n^2 + b_n^2)\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$

(i) $c < \frac{\sqrt{2}}{2}$ :

$(a_n^2 + b_n^2)$ ist geometrische Nullfolge

Einschließungsprinzip $\Rightarrow$

$(a_n, b_n) \to (0,0)$ für $n \to \infty$

(ii) $c > \frac{\sqrt{2}}{2}$ :

$(a_n^2 + b_n^2)$ ist geometrisch gegen $\infty$ bestimmt divergente Folge

$\Rightarrow$ $(a_n)$, $(b_n)$ können nicht gleichzeitig konvergieren

(das wäre Widerspruch zur Unbeschränktheit von $(a_n^2 + b_n^2)$).

**c)** Grenzfall: $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (vgl. **a)**) :

Mögliche Grenzwerte = Fixpunkte $\big(a, (\sqrt{2}-1)\,a\big)$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

Folgende Fälle treten auf:

(i) Start auf Fixpunkt, z.B. $(a_1, b_1) = \big(1, \sqrt{2}-1\big)$ $\rightsquigarrow$ Folge konstant.

(ii) Start bei beliebigem, zufällig gewählten $(a_1, b_1)$

$\rightsquigarrow$ Folge hüpft zwischen zwei Punkten hin und her, z.B.

```
n   a_n            b_n
--------------------------------
1   1.0000000000   0.0000000000
2   0.7071067812   0.7071067812
3   1.0000000000   0.0000000000
4   0.7071067812   0.7071067812
    ...            ...
```

(iii) Spezialfall: Start bei [Vielfachem von] $(a_1, b_1) = \big(\sqrt{2}-1, -1\big)$

$\rightsquigarrow$ Beide Folgen oszillieren:

$$a_n \;=\; (-1)^{n-1}\,a_1, \qquad b_n \;=\; (-1)^{n-1}\,b_1$$

Systematische Erklärung mittels Methoden aus der *Linearen Algebra.* □

**a)** Sei $(a_n)$ eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen mit positivem Grenzwert $a$.

Beweisen Sie: Die Folge $(1/a_n)$ ist beschränkt.

**b)** Sei $x$ der Grenzwert einer konvergenten Folge und $y$ eine reelle Zahl, die weder mit $x$ noch mit irgendeinem Folgenelement $x_n$ übereinstimmt.

Beweisen Sie: Es existiert eine $\varepsilon$ - Umgebung von $y$, in der sich keines der Folgenglieder $x_n$ befindet.

---

**a)** Laut Voraussetzung:

$$1/a_n \to 1/a \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

gemäß Rechenregeln für konvergente Folgen

Daher: $(1/a_n)$ ist konvergent und daher beschränkt.

(Jede konvergente Folge ist beschränkt.)

**b)** Beweis indirekt.

Annahme: In jeder $\varepsilon$ - Umgebung von $y$ befindet sich mindestens ein Folgenelement $x_n$

$\Rightarrow$ $y$ ist *Häufungspunkt der Folge*

Widerspruch zur Konvergenz gegen $x \neq y$.

(Der einzige Häufungspunkt einer konvergenten Folge ist ihr Grenzwert.)

$\square$