a) Eine Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_{n+1} \; = \; 2\sqrt{a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}}$ mit einem gegebenen Startwert $a_1 \geq 0$.

Geben Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$ an, die als Grenzwert der Folge infrage kommen.

b) Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge für beliebige Startwerte $a_1 > 0$.

Hinweis: Achten Sie auf das Monotonieverhalten.

---

a) Für $a_n \to a$ gilt $a_n^2 \to a^2$, wobei für die Folge (a_n^2) gilt

$$a_{n+1}^2 \; = \; 4\,a_n\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 \; = \; \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2$ folgt

$$a^2 \; = \; 4\,a \quad \Rightarrow \quad a = 0 \;\text{ oder }\; a = 4$$

Z.B.: konstante Folgen

- $a_1 = 0 \;\Rightarrow\; a_n \equiv 0, \;\; a = 0$
- $a_1 = 4 \;\Rightarrow\; a_n \equiv 4, \;\; a = 4$

¿ Was passiert für allgemeine $a_1 > 0$?

b) Genaues Verhalten hängt vom Startwert ab.

Behauptung: Die Folge (a_n) ist

(i) *strikt monoton wachsend und nach oben beschränkt* für $0 < a_1 < 4$,

(ii) *strikt monoton fallend und nach unten beschränkt* für $a_1 > 4$.

Beweis:

(i) Für $0 < x < 4$ gilt $x^2 < 4\,x$ und $x < 2\sqrt{x} < 2\sqrt{4} = 4$

Induktionsargument $\Rightarrow$

(a_n) strikt monoton $\uparrow$ und nach oben durch 4 beschränkt

(ii) Für $x > 4$ gilt $x^2 > 4\,x$ und $x > 2\sqrt{x} > 2\sqrt{4} = 4$

Induktionsargument $\Rightarrow$

(a_n) strikt monoton $\downarrow$ und nach unten durch 4 beschränkt

$\Rightarrow$ Für *alle* $a_1 > 0$ ist (a_n) konvergent, mit (siehe **a)**)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \; = \; 4\,.$$

□

a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}}$

b) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n(n+2)} \right)}$

c) Stellen Sie die Reihe $\boxed{x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots}$ in $\sum_{n=0}^{\infty} \ldots$ Notation dar. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

d) $(*)$ Berechnen Sie den Wert der Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n \quad (|x| < 1)}$

---

a) Umformen auf Teleskopsumme:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right) = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \ldots = 1$$

b) Umformen auf Teleskopsumme:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n(n+2)} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)} \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \big(f(n) - f(n+1) \big), \quad \text{mit } f(n) = \frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n(n+2)} \right) = \big(f(2) - f(3)\big) + \big(f(3) - f(4)\big) + \ldots = f(2) = \frac{1}{3}$$

c) Indizes sind Potenzen von 2 :

$$x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}$$

Reihenglieder bilden Nullfolge für $|x| < 1$. Quotientenkriterium anwenden:

$$\frac{|x|^{2^{n+1}}}{|x|^{2^n}} = |x|^{2^{n+1} - 2^n} = |x|^{2^n} \to 0 \quad \text{für } |x| < 1 \quad \ldots \text{ Konvergenz.}$$

Oder: Geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$ als konvergente Majorante.

$\longrightarrow$

d) 'Mustererkennung' (zunächst heuristisch):

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n &= x + 2\,x^2 + 3\,x^3 + 4\,x^4 + 5\,x^5 + 6\,x^6 + \ldots \\ &= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots \\ &\qquad + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots \\ &\qquad\qquad + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots \\ &= x\,(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots) \\ &\quad + x^2\,(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots) \\ &\quad + x^3\,(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \\ &\quad + x^4\,(1 + x + x^2 + \ldots) \;+\; \ldots\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ *Vermutung:*

Mit der geometrischen Reihe $g := 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n &= x\,g + x^2\,g + x^3\,g + x^4\,g + \ldots \;=\; \left(x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\right) g \\ &= \frac{x}{1-x}\,\frac{1}{1-x} \;=\; \frac{x}{(1-x)^2}\,, \quad \text{konvergent für } \; |x| < 1\end{aligned}$$

Beweis dieser (richtigen) Identität:

- Partialsummen analog anschreiben, auswerten, dann $n \to \infty$ ✓

  oder

- Summationstricks anwenden ('partielle Summation', ein diskretes Analogon zur partiellen Integration)

  oder

- Viel einfacher: Rechnen mit Taylorreihen – später.

□

Stellen Sie fest, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihen [bedingt, absolut] konvergieren:

a) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ **b)** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n!\; x^n}$

c) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \quad (k \in \mathbb{N})}$ **d)** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^k\, x^n \quad (k \in \mathbb{N})}$

---

a) Quotientenkriterium:

$$\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Quotientenkriterium:

$$\frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n} = (n+1)\,|x| \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Reihe divergent $\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}$. ($x = 0$ ist trivialer Sonderfall.)

c) Quotientenkriterium:

$$\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)^k}}{\dfrac{|x|^n}{n^k}} = |x|\,\frac{n^k}{(n+1)^k} = |x|\,\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^k}_{\to 1,\; n \to \infty}$$

$\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent für $|x| < 1$ und divergent für $|x| > 1$.

Sonderfall $x = \pm 1$: Siehe Vorlesung (Harmonische Reihe etc.)

d) Quotientenkriterium:

$$\frac{(n+1)^k\,|x|^{n+1}}{n^k\,|x|^n} = |x|\,\frac{(n+1)^k}{n^k} = |x|\,\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^k}_{\to 1,\; n \to \infty}$$

$\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent für $|x| < 1$ und divergent für $|x| > 1$.

Sonderfall $x = \pm 1$: Reihe divergent (Reihenglieder bilden keine Nullfolge). $\square$

a) Überprüfen Sie die Konvergenz der Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}}$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n}$ absolut konvergent?

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{x}{n}\right)^n}$ absolut konvergent?

d) Untersuchen Sie die bedingte und die absolute Konvergenz der Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{1}{n} \sqrt{n + \tfrac{1}{n}}}$

---

a) Quotientenkriterium:

$$\frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{((n+1)!)^2\,(2n)!}{(n!)^2\,(2(n+1))!} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!}{n!\,n!\,(2n+2)!}$$

$$= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n^2 + 2\,n + 1}{4\,n^2 + 6\,n + 2} \to \frac{1}{4}, \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergent.

b) Quotientenkriterium (für $x \neq 0$):

$$\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}\,\frac{\dfrac{(n+1)^n}{(n+1)!}}{\dfrac{n^{n-1}}{n!}} = |x|\,\frac{(n+1)^n\,n!}{n^{n-1}\,(n+1)!} = |x|\,\frac{(n+1)^{n-1}\,\cancel{(n+1)!}}{n^{n-1}\,\cancel{(n+1)!}}$$

$$= |x|\,\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n-1} = |x|\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{1+\frac{1}{n}} \to |x|\,e, \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent für $|x| < 1/e$, divergent für $|x| > 1/e$.

(Grenzfall $x = \pm 1/e$: ?? – nichttrivial)

$\longrightarrow$

c) Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{\left| x + \frac{x}{n} \right|^n} = |x| \underbrace{\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)}_{\to 1,\; n \to \infty}$$

$\Rightarrow$ Reihe absolut konvergent für $|x| < 1$, divergent für $|x| > 1$.

Grenzfall $x = \pm 1$: divergent; Reihenglieder bilden keine Nullfolge.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \tfrac{1}{n} \sqrt{n + \tfrac{1}{n}}$

– Absolute Konvergenz: nein:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \sqrt{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{ist divergente Minorante.}$$

– Bedingte Konvergenz: Verwende *Leibniz-Kriterium*

$$a_n := \tfrac{1}{n} \sqrt{n + \tfrac{1}{n}} = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^3}} \quad \text{ist Nullfolge} \quad \checkmark$$

Untersuchung der Monotonie:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{\dfrac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3}}}{\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^3}}} = \sqrt{\frac{\left((n+1)^2+1\right) n^3}{\left(n^2+1\right)(n+1)^3}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^5 + 2\,n^4 + 2\,n^3}{n^5 + 3\,n^4 + 4\,n^3 + 4\,n^2 + 3\,n + 1}} < 1 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ (a_n) ist monoton fallende Nullfolge

$\Rightarrow$ Reihe konvergent.

□

($*$) Eine Doppelreihe: Sei $p \in (0, \infty)$. Wir betrachten die Reihe

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+(n+k)^p}}$$

Für welche p konvergiert diese Reihe?

Hinweis: In ähnlicher Weise wie für das Cauchy-Produkt von Reihen (Satz 5.15) kann man zeigen, dass im Fall der absoluten Konvergenz der gegebenen Reihe jede Umordnung gegen denselben Wert konvergiert. Verwenden Sie eine Umordnung gemäß einem Diagonalverfahren.

[Skizze:]

Umformulierung mittels Zusammenfassen von Termen (Diagonalverfahren) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+(n+k)^p} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{1+m^p} \cdot \big(\text{Anzahl der } (n,k) \in \mathbb{N}_0^2 \text{ mit } n+k=m\big) \Big)$$

mit

$$\big(\text{Anzahl der } (n,k) \in \mathbb{N}_0^2 \text{ mit } n+k=m\big) = 1+m$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+(n+k)^p} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1+m}{1+m^p} \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^p} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{p-1}}$$

$\Rightarrow$ (vgl. VO) :

Reihe konvergent für $p-1 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad p > 2$.

Anmerkung: Das Symbol '$\sim$' steht hier für 'asymptotisch gleich'. Genauer mittels Majorantenkriterium:

$$\frac{1+m}{1+m^p} \le \frac{2\,m}{1+m^p} \le \frac{2}{m^{p-1}} \quad \text{für} \quad m \ge 1 \,.$$

$\square$

Herr B. kehrt zusammen mit seinem Dackel Bello von Stammersdorf zurück. Zum Zeitpunkt $t = 0{:}00$ (Tür beim Heurigen) befinden sie sich 1 km von zuhause entfernt. Bello, der doppelt so schnell unterwegs ist wie Herr B., läuft schnurstracks bis nach Hause voraus. Da die Tür verschlossen ist, macht er auf der Stelle kehrt und läuft Herrn B. wieder entgegen. Danach wiederholt sich dieses Spiel immer wieder.

a) Einen wie langen Weg legt Bello insgesamt zurück?

b) Berechnen Sie die Entfernungen von den Treffpunkten zu Herrn B.'s Haus, die den Zeitpunkten entsprechen, an denen die beiden immer wieder zusammentreffen.

c) Stellen Sie die Antwort zu **a)** als unendliche Reihe dar, die sich aus **b)** ergibt.

---

a) Bello doppelt so schnell unterwegs wie B. $\Rightarrow$ Bello läuft 2 km

b) Geometrische Progression [Skizze]

1. B. geht x_1 km; Bello: $2\,x_1$ km, wobei $x_1 + 2\,x_1 = 2 \cdot 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 2/3$

   $\rightsquigarrow$ 1. Treffen: $x_1 = 2/3$ km weg vom Heurigen,

   also $1/3$ km weg von zuhause.

2. B. geht x_2 km; Bello: $2\,x_2$ km, wobei $x_2 + 2\,x_2 = 2 \cdot 1/3 \;\Rightarrow\; x_2 = 2/3^2$

   $\rightsquigarrow$ 2. Treffen: $x_1 + x_2 = 2/3 + 2/3^2 = 8/9$ km weg vom Heurigen,

   also $1/3^2$ km weg von zuhause.

3. B. geht x_3 km; Bello: $2\,x_3$ km, wobei $x_3 + 2\,x_3 = 2 \cdot 1/3^2 \;\Rightarrow\; x_3 = 2/3^3$

   $\rightsquigarrow$ 3. Treffen: $x_1 + x_2 + x_3 = 2/3 + 2/3^2 + 2/3^3 = 26/27$ km weg vom Heurigen, also $1/3^3$ km weg von zuhause.

   usw. …

Allgemein (Induktion:)

n - tes Treffen findet statt

$$\frac{1}{3^n}\ \text{km weg von zuhause}$$

c) Geometrische Reihe aus **b)**: Summation der Bellolaufstrecken $\rightsquigarrow$

$$2\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 + \ldots \;=\; 2\left(\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots\right) \;=\; 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \;=\; 4\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$$

… ✓ (vgl. **a)**).

□

Für eine gegebene nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{R}$ definieren wir die Funktion

$$\boxed{d_A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d_A(x) = \inf_{a \in A} |x - a|}$$

a) Interpretieren Sie diese Definition und geben Sie der Funktion d_A einen Namen.

b) Geben Sie die Funktion $d_{[0,1]}$ explizit an und zeichnen Sie ihren Graphen. Ist $d_{[0,1]}$ stetig?

c) Gleiche Frage wie unter **b)**, für $d_{(0,1)}$.

d) Gleiche Frage wie unter **b)**, für $d_{\{0,1\}}$.

e) Zeigen Sie: *Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist das Bild $d_A(A)$ unbeschränkt.*

f) Ist auch die folgende Aussage wahr?

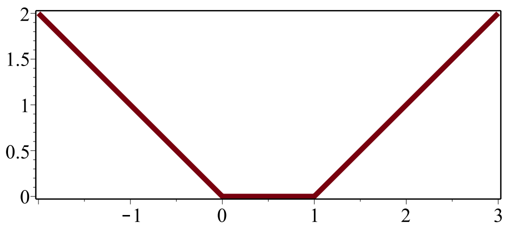
Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ unbeschränkt ist, dann ist das Bild $d_A(A)$ beschränkt.

---

a) $d_A(x) \;=\;$ Abstand von x zu A

b) $d_{[a,b]}$ ist stetig für beliebige $[a, b]$. Z.B.

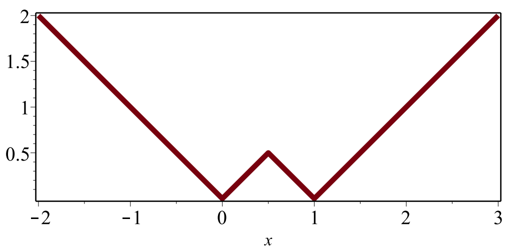
$$d_{[0,1]}(x) \;=\; \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 0, & 0 \le x \le 1, \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$$



c) $d_{(0,1)}(x) = d_{[0,1]}(x)$

d) $d_{\{a,b\}}$ ist stetig für beliebige a, b. Z.B.:

$$d_{\{0,1\}}(x) \;=\; \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ x - 1, & x \ge 1 \end{cases}$$



e) $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt: $|x| \le M$ für alle $x \in A$

$\Rightarrow$ Für $|x| > M$ ist $d_A(x) > |x| - M > 0$, und $d_A(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$

f) Falsch. Gegenbeispiel: $A = [0, \infty)$, mit $d_A(x) = -x$ für $x < 0$. $\square$

Zu untersuchen ist die Stetigkeit bzw. allfällige Unstetigkeitsstellen und stetige Fortsetzbarkeit für folgende Funktionen.

a) $f\colon\ [0,2] \to \mathbb{R}$, mit

$$\boxed{f(x) = g(x) \ \text{ für } \ x \in [0,1], \quad \text{und} \quad f(x) = g(x-1) \ \text{ für } \ x \in (1,2]}$$

Dabei ist $g:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion. Geben Sie insbesondere an, welche Bedingung $g(x)$ erfüllen muss, damit die Funktion $f(x)$ stetig ist.

b) $f:\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, mit $\boxed{f(x) = p(1/x)}$ Dabei ist $p(x)$ ein gegebenes Polynom.

c) Gibt es Polynome p, so dass sich die unter **b**) definierte Funktion f an der Stelle $x = 0$ stetig fortsetzen lässt?

d) $f\colon\ (-r,r) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, mit $\boxed{f(x) \ = \ \dfrac{\sqrt{1+p(x)} \ - \ 1}{x^2}}$

Dabei ist $p(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, x^i$ ein gegebenes Polynom ist mit $p(0) = 0$.

(i) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ ist wohldefiniert für hinreichend kleines $r > 0$.

(ii) Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck '$f(0) = 0/0$'. Untersuchen Sie, für welche Polynome p an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vorliegt. Falls dies zutrifft, geben Sie den Wert der stetigen Fortsetzung an, d.h. den Limes

$$\lim_{x \to 0} f(x)\,.$$

In welcher Weise hängt dieser Limes von dem Polynom p ab?

---

a) 'Kritische' Stelle: $x = 1$. Hier ist

$$f(1) = g(1)\,, \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1+} f(x) \ = \ \lim_{x \to 0+} g(x) \ = \ g(0)$$

$\Rightarrow$ f stetig falls $g(0) = g(1)$.

b) $1/x$ nicht stetig an $x = 0$ $\Rightarrow$ auch $p(x)$ im Allgemeinen unstetig an $x = 0$.

c) ja, aber nur O.K. für $p(x) = \text{const.}$

$\longrightarrow$

d) (i) $p(0) = 0$, und $p(x)$ ist stetig $\Rightarrow\ \exists\, \delta > 0 : \ |p(x)| < 1$ für $|x| < \delta$

$\Rightarrow \quad \sqrt{1 + p(x)} \in \mathbb{R}$ und $f(x)$ wohldefiniert für $|x| < \delta$. ✓

(ii) Umformen:

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{1+p(x)}\; - 1}{x^2} \;=\; \frac{(\sqrt{1+p(x)}\; - 1)(\sqrt{1+p(x)}\; + 1)}{x^2\,(\sqrt{1+p(x)}\; + 1)}$$

$$= \frac{p(x)}{x^2\,(\sqrt{1+p(x)}\; + 1)}$$

– Für $a_1 = 0$ (d.h. $p'(0) = 0$) ist

$$p(x) \;=\; a_2\, x^2 + a_3\, x^3 \;=\; x^2\,(a_2 + a_3\, x + \ldots)$$

und

$$\lim_{x \to 0} f(x) \;=\; \lim_{x \to 0} \frac{a_2 + a_3\, x + \ldots}{\sqrt{1+p(x)}\; + 1} \;=\; \frac{a_2}{2}$$

mit hebbarer Unstetigkeit.

– Für $a_1 \neq 0$ liegt eine echte Unstetigkeit vor, mit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \pm\infty$.

Alternativen zur Bestimmung des Grenzwertes:

Regel von de l'Hospital, oder *Taylor-Entwicklung* (später).

□

Die Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien (in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$) definiert als

$$\boxed{f_n(x) = \frac{nx}{1+|nx|}}$$

a) Untersuchen Sie die Stetigkeit dieser Funktionen.

b) Zeichnen Sie einige Funktionsgraphen für $n = 1, 2, 3, \ldots$

c) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\boxed{f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)}$

Geben Sie f explizit an. Ist f stetig?

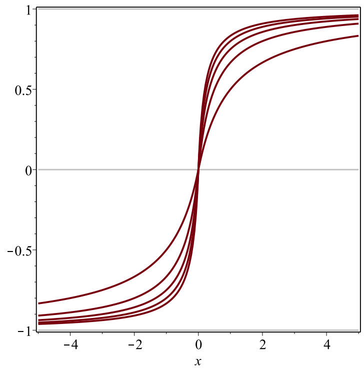
d) $(*)$ Sei $\boxed{g_n(x) = \dfrac{nx}{1+(nx)^2}}$

Vermutung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Ist diese Vermutung richtig?

---

a) Die f_n sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$ als Komposition stetiger Funktionen.

b) $n = 1 \ldots 5:$



c) $f(x) \;=\; x$ - abhängiger Limes für $n \to \infty:$

$$f(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ +1, & x > 0 \end{cases}$$

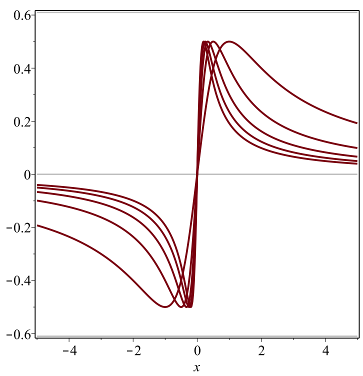
$f(x)$ ist unstetig an $x = 0$ (Sprungstelle).

d) Die Aussage ist richtig: Für alle $(0 \neq)\, x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|g_n(x)| \;<\; \frac{1}{|nx|} \;\to\; 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \checkmark$$

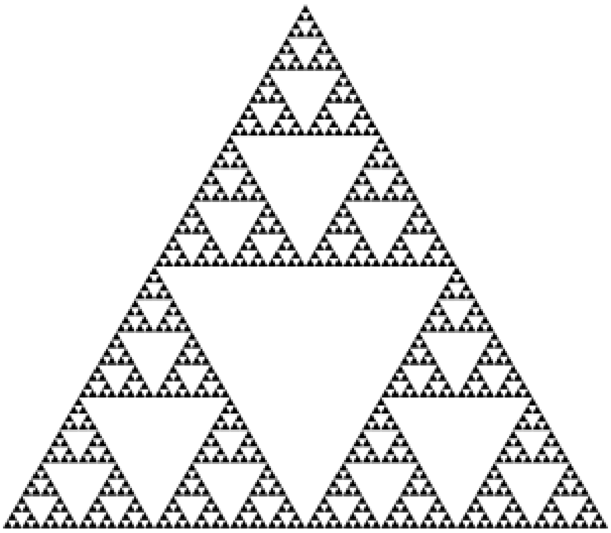
Beachte jedoch:

$$g_n\left(\pm\tfrac{1}{n}\right) = \pm\tfrac{1}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$



Anmerkung: $f_n(x) = f_1(nx),\;\; g_n(x) = g_1(nx)$ für alle n. $\square$

Ein gegebenes Dreieck Δ mit Eckpunkten A, B, C wird in 4 kleinere, zu Δ ähnliche Dreiecke unterteilt, die dadurch entstehen, dass man die Seiten von Δ in der Mitte teilt und diese 3 Punkte als neue Eckpunkte für die kleineren Dreiecke verwendet. Dieser Prozess wird rekursiv fortgesetzt, siehe Skizze (diese zeigt den Spezialfall eines gleichseitigen Dreiecks).



In dieser Weise erzeugt man eine Folge von immer kleineren, zu Δ ähnlichen Dreiecken ∇_k, die in der Skizze weiß erscheinen (1 kleines ∇, 3 noch kleinere ∇'s, 9 noch noch kleinere ∇'s, ...). Wenn man sich diesen Prozess unendlich oft fortgesetzt denkt – gegen welchen Wert konvergiert die Summe der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke ∇_k (im Vergleich zur Fläche des gegebenen Dreiecks Δ)?

'Szierpinski-Dreieck' (ein fraktales Objekt):

- Geometrische Progression. Alle Dreiecke sind zueinander ähnlich (für beliebiges Δ), und die Flächeninhalte $F(\nabla_k)$ reduzieren sich bei jeder Verfeinerung um den Faktor $\frac{1}{4}$.

Daher, mit D = Fläche von Δ:

$$\sum_{\nabla_k;\, k=0\ldots\infty} F(\nabla_k) = 3^0\,\frac{D}{4} + 3^1\,\frac{D}{4^2} + 3^2\,\frac{D}{4^3} + \ldots = \frac{D}{3}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{3}{4}\Big)^j = \frac{D}{3}\,\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = D\,.$$

$\square$