a) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es gelte $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie:

Es existiert ein $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ *mit* $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$.

b) Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Zeigen Sie:

$g(x) := |f(x)|$ *ist ebenfalls stetig auf* $[a,b]$.

---

a) Betrachte $g\colon [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}, \ \ g(x) := f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$

g ist stetig als Komposition stetiger Funktionen.

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} g(0) &= f(\tfrac{1}{2}) - f(0)\,, \\ g(\tfrac{1}{2}) &= f(1) - f(\tfrac{1}{2}) \ = \ f(0) - f(\tfrac{1}{2}) \ = \ -g(0) \end{aligned}$$

2 Fälle:

(i) $f(\frac{1}{2}) = f(0):\quad \rightsquigarrow \quad \xi = 0$

(ii) $f(\frac{1}{2}) \neq f(0):\quad \rightsquigarrow \quad g(0) = -g(\frac{1}{2}) \neq 0$

<u>Zwischenwertsatz</u> $\Rightarrow\ \ \exists\, \xi \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $g(\xi) = 0$

$\Rightarrow\ \ \exists\, \xi \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})\,.$ ✓

b) $|f|$ stetig als Komposition stetiger Funktionen. ✓

Oder direkt mittels ε-δ - Definition der Stetigkeit: Sei $c \in [a,b]$.

Für beliebige $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so dass (mit $x \in [a,b]$)

$$|x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Für diese x gilt dann auch (duale Variante der Dreiecksungleichung!)

$$\big|\,|f(x)| - |f(c)|\,\big| \ \le \ |f(x) - f(c)| \ < \ \varepsilon$$

$\Rightarrow\ \ |f|$ stetig an $x = c$. ✓

$\square$

Die Funktion $f(x)$ sei definiert als $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}}$

a) Wie lautet der Definitionsbereich von f?

b) Geben Sie für $f(x)$ eine explizite Darstellung an und untersuchen Sie die Stetigkeit von f.

c) Gleiche Frage wie unter **a)**, **b)**, für $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}}$

---

a)
- $x = 0:\ \ f(x) = 0$
- $x \neq 0:$ Konvergente geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n = x^2 \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1$$

$\Rightarrow\ \ D(f) = \mathbb{R}$

b) Aus **a)**:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

unstetig an $x = 0$, mit hebbarer Unstetigkeit: Mit der modifizierten Definition $f(0) := 1$ wird f stetig.

c) Hier (geometrische Reihe wie in **a)**): $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

□

a) $(*)$ Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, und (x_n) sei eine Cauchyfolge in I. Zeigen Sie:

$\big(f(x_n)\big)$ *ist ebenfalls eine Cauchyfolge.*

b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Aussage aus **c)** nicht zutreffen muss, wenn f nur als stetig vorausgesetzt wird.

---

a) *Gleichmäßige Stetigkeit* von f auf I:[a]

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0: \quad |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(x_n) *ist Cauchyfolge:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}: \quad m, n \geq N \quad \Rightarrow \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Zu zeigen: $\big(f(x_n)\big)$ ist Cauchyfolge.

Beweis:

(i) Beginne mit der gleichmäßigen Stetigkeit:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0: \quad |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(ii) (x_n) Cauchyfolge $\Rightarrow$

Für dieses δ $\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad m, n \geq N \quad \Rightarrow \quad |x_m - x_n| < \delta$

$\Rightarrow$ Für dieses N: $\quad m, n \geq N \quad \Rightarrow \quad |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \quad \checkmark$

b) Beispiel: $f(x) = 1/x$ auf $I = (0, 1]$ (nicht gleichmäßig stetig)

$(x_n) = (1/n)$ ist Cauchyfolge

$\big(f(x_n)\big) = (n)$ ist <u>keine</u> Cauchyfolge. $\checkmark$

$\square$

[a] Schreibe x, y statt x_1, x_2

a) Gegeben seien zwei Lipschitz-stetige Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit Lipschitz-Konstante L_f bzw. L_g. Sind die Funktionen $\boxed{f+g, \quad f \cdot g, \quad f \circ g}$ dann ebenfalls garantiert Lipschitz-stetig, bzw. welche zusätzliche Annahmen werden dafür benötigt? Geben Sie die betreffenden Lipschitz-Konstanten an.

b) Unter **a)** wurde in einem der Fälle eine zusätzliche Annahme benötigt. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Lipschitz-Stetigkeit tatsächlich verletzt sein kann, wenn diese Annahme nicht erfüllt ist.

c) Sei $f\colon [a,b] \to [c,d]$ stetig und bijektiv. Geben Sie eine Bedingung an f an, die sicherstellt, dass $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ Lipschitz-stetig ist.

d) Diskutieren Sie **c)** konkret für den Spezialfall aus UE 2, Aufgabe **1a)**.

e) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Lipschitz-stetig, und (x_n) eine Folge in $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Was können Sie über die Folge $\left(\frac{f(x_n)-f(x^*)}{x_n - x^*}\right)$ aussagen? Wie sieht es mit der Konvergenz aus?

---

a) • Summe $f+g$:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x_1) - (f+g)(x_2)| &= |f(x_1) - f(x_2) + g(x_1) - g(x_2)| \\ &\le |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| \\ &\le L_f\,|x_1 - x_2| + L_g\,|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad L_{f+g} \le L_f + L_g \quad \checkmark$

• Produkt $f \cdot g$:

$$\begin{aligned} |(f\cdot g)(x_1) - (f\cdot g)(x_2)| &= |f(x_1)\,g(x_1) - f(x_2)\,g(x_2)| \\ &= |f(x_1)\,(g(x_1) - g(x_2)) + (f(x_1) - f(x_2))\,g(x_2)| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für Lipschitz-Abschätzung benötige auch Beschränktheit von f, g.

Mit $M_f = \sup_f$, $M_g = \sup_g \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} |(f\cdot g)(x_1) - (f\cdot g)(x_2)| &\le |f(x_1)|\,|(g(x_1) - g(x_2))| + |f(x_1) - f(x_2)|\,|g(x_2)|| \\ &\le M_f\,L_g\,|x_1 - x_2| + L_f\,M_g\,|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad L_{f\cdot g} \le M_f\,L_g + L_f\,M_g$

• Komposition $f \circ g$:

$$\begin{aligned} |(f\circ g)(x_1) - (f\circ g)(x_2)| &= |f(g(x_1)) - f(g(x_2))| \\ &\le L_f\,|g(x_1) - g(x_2)| \le L_f\,L_g\,|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad L_{f\circ g} \le L_f \cdot L_g \quad \checkmark$

$\longrightarrow$

b) Beispiel: $f(x) = g(x) = x$ auf $\mathbb{R}$:

- $f(x) = x$ ist auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ($L_f = 1$), jedoch unbeschränkt.
- $(f(x))^2 = x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ tatsächlich nicht Lipschitz-stetig:

$$x_1^2 - x_2^2 \;=\; (x_1 + x_2)\,(x_1 - x_2)\,,$$

wobei für den Faktor $(x_1 + x_2)$ ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ beliebig) keine Schranke existiert.

c) Aus der Bedingung

$$|f(x_1) - f(x_2)| \;\geq\; k_f\,|x_1 - x_2| \quad \text{für alle} \;\; x \in [a,b], \quad \text{mit} \quad k_f > 0$$

folgt

$$|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| \;\leq\; \frac{1}{k_f}\,|y_1 - y_2| \quad \text{für alle} \;\; y \in [c,d]$$

$\Rightarrow \quad L_{f^{-1}} \leq 1/k_f\,.$

Falls der Graph von f sehr flach verläuft, ist $L_{f^{-1}}$ sehr groß.

d) UE 2, Aufgabe **1a)** : $f\colon\, [a,b] \to [c,d]$ affin, wachsend:

$$f(x) \;=\; c + \frac{d-c}{b-a}\,(x-a)$$

Hier ist

$$L_f \;=\; k_f \;=\; \frac{d-c}{b-a}\,, \qquad L_{f^{-1}} \;=\; \frac{1}{k_f} \;=\; \frac{b-a}{d-c}\,.$$

Diese Funktionen haben konstante Steigung.

e) Mit $L = L_f$:

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x^*)}{x_n - x^*}\right| \;\leq\; L \quad \text{ist beschränkt}$$

Daraus folgt noch nicht die Konvergenz der Folge $\left(\frac{f(x_n)-f(x^*)}{x_n-x^*}\right)$.

Diese erfordert *Differenzierbarkeit* von f.

Lipschitz-Stetigkeit ist ‘schwächer’ als Differenzierbarkeit.

$\square$

Eine physikalische Größe x wird gemessen, wobei ein kleiner Messfehler der maximalen Größe δ unvermeidlich ist, d.h. die Messung liefert einen Wert $\tilde{x}$ mit $|\tilde{x} - x| \le \delta$. Wir fragen nach dem Effekt dieses Messfehlers auf den Funktionswert $f(x)$.

a) f sei als stetig vorausgesetzt (sonst sei über f nichts bekannt). Kann man dann eine explizite Schranke für die maximale Abweichung $|f(\tilde{x}) - f(x)|$ angeben?

b) Welche zusätzliche Information über f wird benötigt, damit eine Schranke für $|f(\tilde{x}) - f(x)|$ angegeben werden kann, und wie lautet diese Schranke?

c) Sei konkret $f(x) = \sqrt{x}$ und $x, \tilde{x} > 0$. Geben Sie die gesuchte Schranke an. Ihr Kommentar dazu?

---

a) Nein. Aus der Stetigkeit folgt kein quantitativer Zusammenhang zwischen $|\tilde{x} - x|$ und $|f(\tilde{x}) - f(x)|$.

b) Benötige Lipschitz-Stetigkeit mit Lipschitzkonstante L:

$$|f(\tilde{x} - f(x)| \;\le\; L\,|\tilde{x} - x| \;\le\; L\,\delta$$

c) $\sqrt{x}$ ist nicht Lipschitz-stetig auf $[0, c]$. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned} |\sqrt{\tilde{x}} - \sqrt{x}| \;&=\; \left| \frac{\left(\sqrt{\tilde{x}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{\tilde{x}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{\tilde{x}} + \sqrt{x}} \right| \\ &=\; \left| \frac{\tilde{x} - x}{\sqrt{\tilde{x}} + \sqrt{x}} \right| \;\approx\; \left| \frac{\tilde{x} - x}{2\sqrt{\tilde{x}}} \right| \;\le\; \frac{\delta}{2\sqrt{\tilde{x}}} \end{aligned}$$

Der Effekt des Messfehlers wird sehr groß und geht gegen ∞ für $x \to 0$.

$\square$

Funktionen können auch *implizit* definiert sein, d.h. als Lösung einer parameterabhängigen Gleichung. Betrachten Sie die Gleichung

$$\frac{y-1}{x+1} = 1 - xy$$

für die Unbekannte y in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$. Durch ihre Lösung ist eine Funktion $y = f(x)$ definiert. Wie lautet diese? Ist sie wohldefiniert und stetig für alle $x \in \mathbb{R}$?

Besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = -1$. Was ist $f(-1)$?

- $x \neq -1:$

  Die gegebene Gleichung ist äquivalent zur linearen Gleichung (abhängig von x)

  $$y - 1 = (x+1)(1 - x\,y) \quad \Leftrightarrow \quad (1 + x + x^2)\,y = 2 + x$$

  mit $1 + x + x^2 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\quad \Rightarrow$

  $$y = f(x) = \frac{2+x}{1+x+x^2} \quad \text{wohldefiniert und stetig auf ganz } \mathbb{R}\,,$$

  offenbar auch für $x = -1$.

- $x = -1:$

  Die gegebene Gleichung ist nicht definiert, aber $f(x)$ ist stetig an $x = -1:$

  $$f(-1) = \frac{2-1}{1-1+1^2} = 1\,.$$

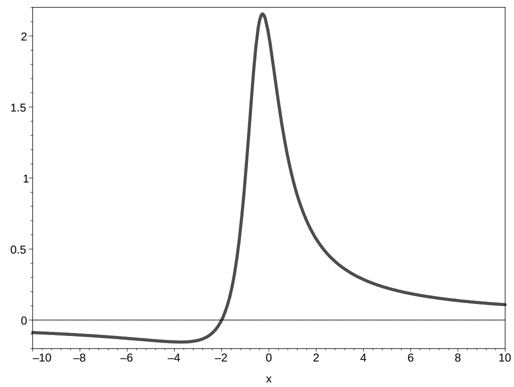
  Beachte: Für $x = -1,\; y = 1$ ist

  $$\frac{y-1}{x+1} = \frac{0}{0}$$

  ein unbestimmter Ausdruck. Für $y = f(x)$ gilt jedoch

  $$\frac{y-1}{x+1} = \frac{f(x)-1}{x+1} = \frac{\frac{2+x}{1+x+x^2} - 1}{x+1} = \frac{\frac{2+x-1-x-x^2}{1+x+x^2}}{1+x} = \frac{\frac{(1-x)\cancel{(1+x)}}{1+x+x^2}}{\cancel{(1+x)}}$$

  mit Wert 2 für $x = -1$.



□

Geben Sie jeweils einen Wert für den Parameter c an, so dass die Funktion – falls möglich – stetig fortsetzbar ist, und geben Sie den Funktionswert der stetigen Fortsetzung an.

a) $\boxed{f(x) = \frac{x^n - 1}{x - c}\,, \quad n \in \mathbb{N}}$ (stetige Fortsezung an $x = c$)

b) $\boxed{f(x) = \frac{x^n - 1}{(x - c)^2}\,, \quad n \in \mathbb{N}}$ (stetige Fortsezung an $x = c$)

c) $\boxed{f(x) = \frac{\sqrt{1 + x} - c}{x}}$ (stetige Fortsezung an $x = 0$)

d) (∗) $\boxed{f(x) = \frac{(1 + x)^{1/3} - (1 + c\,x)}{x^2}}$ (stetige Fortsezung an $x = 0$)

---

a) Mittels geometrischer Summe: $x^n - 1 \;=\; (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})\,(x - 1)$

$\Rightarrow$

$$f(x) \;=\; \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\right) \frac{x - 1}{x - c}$$

stetig fortsetzbar an $x = c$ für $c = 1$, mit $f(1) = n$.

Einfachere Schreibweise:

$$f(x) \;=\; \frac{x^n - 1}{x - c} \;=\; \frac{x^n - 1}{x - 1}\,\frac{x - 1}{x - c} \;=\; \underbrace{\frac{x^n - 1}{x - 1}}_{\text{geom. Summe}} \quad \text{für} \quad c = 1$$

b) Nicht stetig fortsetzbar an $x = c$, auch nicht für $c = 1$.

c) Umformen:

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{1 + x} - c}{x} \;=\; \frac{(\sqrt{1 + x} - c)(\sqrt{1 + x} + c)}{x\,(\sqrt{1 + x} + c)} \;=\; \frac{1 + x - c^2}{x\,(\sqrt{1 + x} + c)}$$

$\Rightarrow$ Stetig fortsetzbar an $x = 0$ für $c = 1$ (nicht für $c = -1\,!$) :

$$f(x) \;=\; \frac{\cancel{1} + x - \cancel{1}}{x\,(\sqrt{1 + x} + 1)} \;=\; \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\,(\sqrt{1 + x} + 1)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1}\,,$$

mit $f(0) = \frac{1}{2}$.

$\longrightarrow$

d) $f(x) = \dfrac{(1+x)^{1/3} - (1+c\,x)}{x^2}$

Verwende Lemma 1.2 für $n = 3$: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + a\,b + b^2)$.

Mit $a = (1+x)^{1/3}$, $b = (1+c\,x)$ $\rightsquigarrow$

$$a - b = (1+x)^{1/3} - (1+c\,x)\,,$$

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (1+x) - (1+c\,x)^3 = (1+x) - (1 + 3\,c\,x + 3\,c^2\,x^2 + c^3\,x^3) \\ &= (1-3\,c)\,x - 3\,c^2\,x^2 - c^3\,x^3\,, \end{aligned}$$

$$a^2 + a\,b + b^2 = (1+x)^{2/3} + (1+x)^{1/3}\,(1+c\,x) + (1+c\,x)^2$$

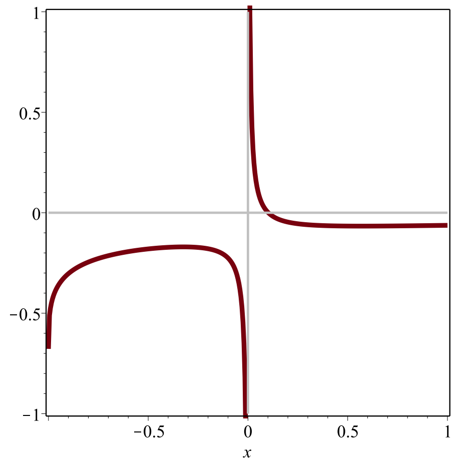
$\Rightarrow$ Zähler von $f(x)$:

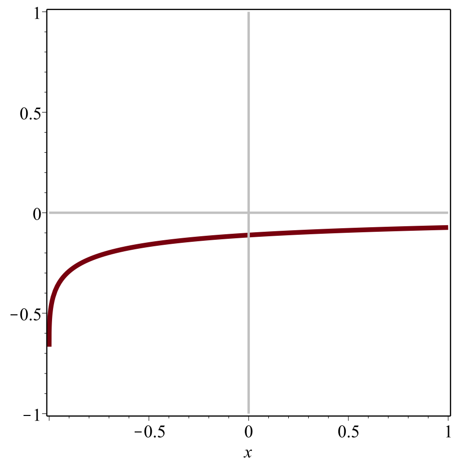
$$(1+x)^{1/3} - (1+c\,x) = \frac{(1-3\,c)\,x - 3\,c^2\,x^2 - c^3\,x^3}{(1+x)^{2/3} + (1+x)^{1/3}\,(1+c\,x) + (1+c\,x)^2}$$

$\Rightarrow$ Stetige Fortsetzbarkeit von $f(x)$ an $x = 0$ für $c = 1/3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(1+x)^{1/3} - (1 + \frac{1}{3}\,x)}{x^2} \\ &= \frac{0 - \frac{1}{3}\,x^2 - \frac{1}{27}\,x^3}{x^2\left((1+x)^{2/3} + (1+x)^{1/3}\,(1+c\,x) + (1+c\,x)^2\right)} \\ &= \frac{-\frac{1}{3} - \frac{1}{27}\,x}{(1+x)^{2/3} + (1+x)^{1/3}\,(1+c\,x) + (1+c\,x)^2} \to -\frac{1}{9} \quad \text{für} \quad x \to 0\,. \end{aligned}$$

Graph von $f(x)$ für $c = 1/3.1$ (links) und $c = 1/3$ (rechts):





Anmerkung:

Das geht alles einfacher mit Differentialrechnung, z.B. mittels *Taylor-Entwicklung* oder Anwendung der *Regel von de l'Hôspital* (später). □

Gegeben sei die quadratische Gleichung $\boxed{x^2 - b\,x + 1 = 0}$

a) Geben Sie die beiden Funktionen $x_1(b)$, $x_2(b)$ an, die den beiden Lösungen entsprechen (dabei sind nur diejenigen Werte von b zu berücksichtigen, für die sich reellwertige Lösungen ergeben).

b) Zeigen Sie: Für jedes $x > 0$ gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}$, so dass x eine Lösung der gegebenen Gleichung ist. Dies definiert eine Funktion $b = f(x)$. Geben Sie diese Funktion f konkret an. Ist f injektiv?

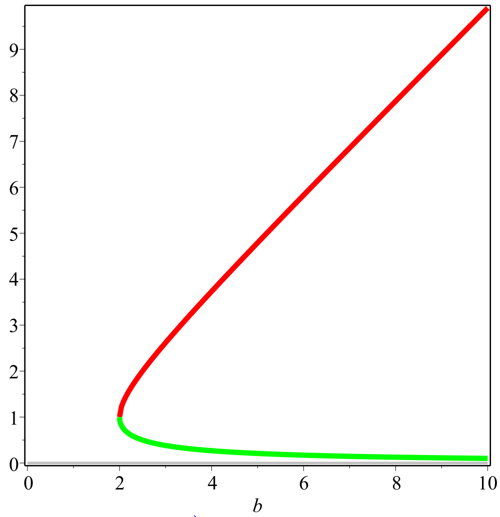
c) Setzen Sie die beiden Funktionen $x_1(b)$, $x_2(b)$ aus **a)** und die Funktion $f(x)$ aus **b)** zueinander in Beziehung.

---

a) Reelle Lösungen nur für $b \geq 2$:

$$x_1(b) = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - 4}\right) > 0\,, \qquad x_2(b) = \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - 4}\right) > 0$$

mit $x_1(2) = x_2(2) = 1$ (doppelte Nullstelle für $b = 2$).



Grafik: $x_1(b)$, $x_2(b)$ (vertikale Achse entspricht x)

b) $x > 0$ gegeben. Suche b, so dass x Lösung der quadratischen Gleichung ist:

$$x^2 - b\,x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b\,x = x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = f(x) = x + \frac{1}{x}$$

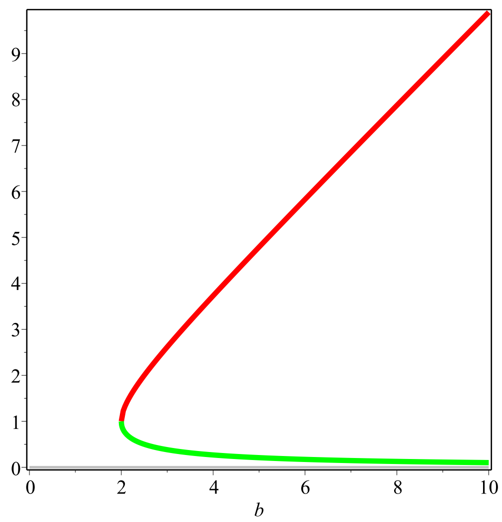
Hier: $b = f(x) \to \infty$ für $x \to 0$ und $x \to \infty$.

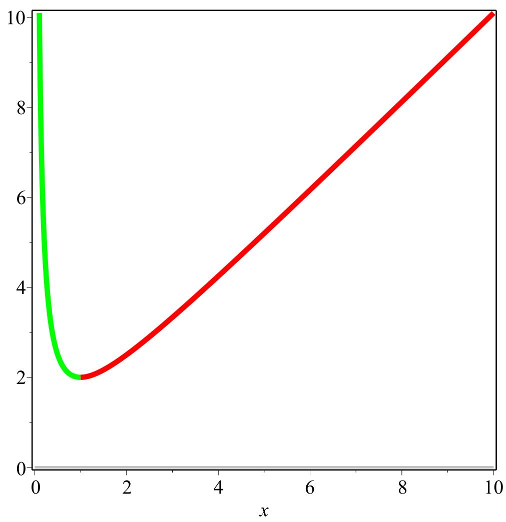
f ist nicht injektiv: Zu jedem $b > 2$ gibt es ja 2 Lösungen $x_1(b)$, $x_2(b)$.

Dies erkennt man auch aus $f(x) = f(1/x)$.

$\longrightarrow$

c)





Links: Die Funktionen $x_1(b)$ und $x_2(b)$ (wie oben)

Rechts: Die Funktion $b = f(x) = x + 1/x$

Die roten und grünen Funktionsgraphen sind jeweils zueinander invers.

Z.B. ‘rot’:

- $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ist injektiv auf $[1, \infty)$:

  $$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2 + \frac{1}{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1\, x_2}$$

  Daher $x_1 = x_2$ oder $x_1\, x_2 = 1$; letzteres geht nur für $x_1 = x_2 = 1$. ✓

- $\Rightarrow$ f ist bijektiv als Funktion: $[1, \infty) \to [2, \infty)$

- Umkehrfunktion: Löse $b = f(x)$ eindeutig nach $x \geq 1$ auf für $b \geq 2$:

$$x + \frac{1}{x} = b \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - b\,x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1(b)$$

Analog für ‘grün’.

$\square$

a) Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Aussage zutrifft.

Sei $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf dem offenen Intervall (a,b) 'strikt positive Funktion', d.h., $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $f(x) \geq \varepsilon$ für alle $x \in (a,b)$. *Dann gilt auch* $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \geq \varepsilon$.

b) Charley Brown sagt:

Stell dir eine stetige Funktion f vor mit der Eigenschaft $f(0) = 0$, und eine konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Dann ist ja klar, dass auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ konvergiert.

Darauf Snoopy: *Nein, falsch.* Snoopy hat natürlich wie immer Recht. Warum? Geben Sie ein Beispiel an, das Snoopy's Argument zwingend untermauert.

c) Beweisen Sie den **Satz von Snoopy:** Dieser bezieht sich auf die unter **b)** betrachtete Situation, und wir nehmen zusätzlich an, dass gilt:

- Die Reihe $\sum_n a_n$ ist absolut konvergent, sowie
- $\exists\, \varepsilon > 0 :\quad f$ ist Lipschitz-stetig auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Dann gilt: $\sum_n f(a_n)$ ist ebenfalls absolut konvergent.

---

a) Die Aussage ist wahr.

Beweis indirekt ([Skizze]) : Zu zeigen ist $f(a) \geq \varepsilon$ und $f(b) \geq \varepsilon$.

Annahme: $f(a) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \exists\, \delta > 0$ mit $f(x) < \varepsilon$ für alle $x \in [a, a+\delta)$.

(Folgerung aus Satz über die Vorzeichenbeständigkeit stetiger Funktionen!)

Die rote Aussage widerspricht der Voraussetzung über f. (Analog für b.)

b) Reihe konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist Nullfolge.

Daher gemäß Voraussetzungen über f :

$$0 \;=\; f(0) \;=\; f\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

D.h.: $\big(f(a_n)\big)$ ist Nullfolge. *Dies ist jedoch nicht hinreichend für die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$.*

- Gegenbeispiel: Wähle $f(x) = \sqrt{x}$ und $a_n = 1/n^2$.

c) Für hinreichend großes $N = N(\varepsilon)$ liegen alle a_n in $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

$\Rightarrow$

$$\sum_{n\geq N} L\,|a_n| \quad \text{ist konvergente Majorante für} \quad \sum_{n\geq N} |f(a_n)|\,. \qquad ✓$$

(L ...Lipschitzkonstante für f auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Beachte $a_n = a_n - 0$, und $f(a_n) = f(a_n) - f(0)$ laut Voraussetzung.) $\Rightarrow$ Beweis ✓ $\square$

(∗) Die Cantor-Funktion (auch: *Devil's Staircase*):

Wir definieren eine Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$ rekursiv durch $f_0(x) = x$, sowie

$$\boxed{f_n(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2}\, f_{n-1}(3\,x), & 0 \le x < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2}\big(1 + f_{n-1}(3\,x-2)\big), & \frac{2}{3} < x \le 1. \end{cases}}$$

a) Zeigen Sie: Die Funktionen $f_n(x)$ sind wohldefiniert, und alle Funktionswerte liegen in $[0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Können Sie die Funktionswerte auch noch genauer eingrenzen?

b) Zeigen Sie: Die f_n sind stetig für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

c) (freiwillig:) Schreiben Sie ein Computerprogramm, das für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ den Graphen der Funktion $f_n(x)$ zeichnet.

---

a) Beweis per Induktion (Induktionsanfang ✓); Induktionsschritt $n-1 \;\mapsto\; n$:

(i) $0 \le x < \frac{1}{3}$:

$$3\,x \in [0,1] \quad \overset{\text{ind}}{\Rightarrow} \quad f_n(x) = \tfrac{1}{2}\, f_{n-1}(3\,x) \in [0, \tfrac{1}{2}] \quad ✓$$

(ii) $\frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}$:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \in [0,1] \quad (\text{unabhängig von } n) \quad ✓$$

(iii) $\frac{2}{3} < x \le 1$:

$$3\,x - 2 \in [0,1] \quad \overset{\text{ind}}{\Rightarrow} \quad f_n(x) = \tfrac{1}{2}\big(1 + f_{n-1}(3\,x-2)\big) \in [\tfrac{1}{2}, 1] \quad ✓$$

Insbesondere: $f_n(0) = 0$ und $f_n(1) = 1$ für alle n.

b) Beweis per Induktion (Induktionsanfang ✓); Induktionsschritt $n-1 \;\mapsto\; n$:

Zu überprüfen sind nur die Stellen $x = \frac{1}{3}$ und $x = \frac{2}{3}$.

(i) $x = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \frac{1}{3}-} f_n(x) \;&=\; \tfrac{1}{2}\, f_{n-1}(3 \cdot \tfrac{1}{3}) \;=\; \tfrac{1}{2}\,, \\ f_n(\tfrac{1}{3}) \;&=\; \tfrac{1}{2} \end{aligned} \quad ✓$$

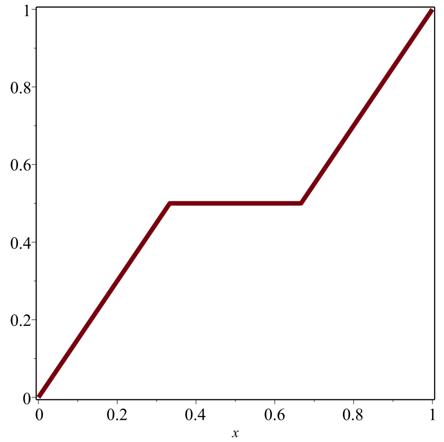
(ii) $x = \frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} f_n(\tfrac{2}{3}) \;&=\; \tfrac{1}{2}\,, \\ \lim_{x \to \frac{2}{3}+} f_n(x) \;&=\; \tfrac{1}{2}\big(1 + f_{n-1}(3 \cdot \tfrac{2}{3} - 2)\big) \;=\; \tfrac{1}{2} \end{aligned} \quad ✓$$

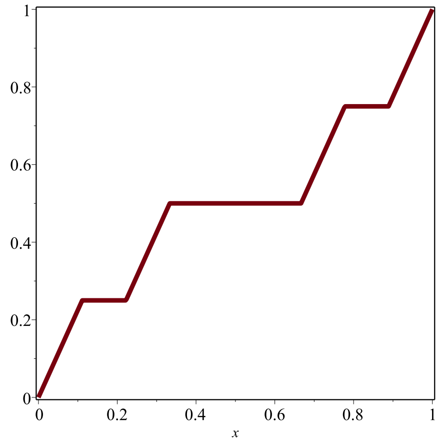
⟶

c) Maple-Code (rekursiv):

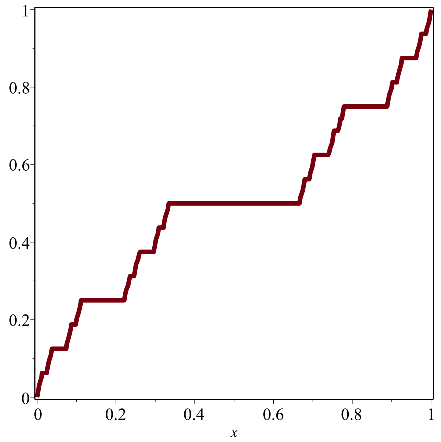
```
Devil := proc(x,n)
if n = 0 then
   return x
else
   if x < 1/3 then return Devil(3*x,n-1)/2
   elif x <= 2/3 then return 1/2
   else return (1+Devil(3*x-2,n-1))/2
   end if
end if
end proc:
```



$n = 1$



$n = 2$



$n = 10$

□