Bestimmen Sie die reelle Faktorisierung der folgenden Polynome:

a) $\boxed{2\,x^3 - 12\,x^2 + 22\,x - 12}$

b) $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad (n \in \mathbb{N})}$

c) $\boxed{x^4 - (n^2+1)\,x^2 + n^2 \quad (n \in \mathbb{N})}$

d) $\boxed{x^3 - 1}$

e) $\boxed{x^2 - (a+b)\,x + a\,b \quad (a, b \in \mathbb{R})}$

f) $\boxed{x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (a\,b + b\,c + c\,a)\,x - a\,b\,c \quad (a, b \in \mathbb{R})}$

---

a) Beachte

$$2\,x^3 - 12\,x^2 + 22\,x - 12 \;=\; 2\,\big(\underbrace{x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6}_{\text{monisch}}\big),$$

also

$$2\,x^3 - 12\,x^2 + 22\,x - 12 \;=\; 2\,(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \qquad x_i \;=\; \text{Nullstellen.}$$

Man errät die Nullstelle $x_1 = 1$. Polynomdivision $\leadsto$

```
      x^3 - 6 x^2 + 11 x - 6  /  x - 1  =  x^2 - 5 x + 6
-     x^3 -   x^2
      ----------------------
          - 5 x^2 + 11 x - 6
-         - 5 x^2 +  5 x
      ----------------------
                     6 x - 6
-                    6 x - 6
      ----------------------
                           0
```

Mit $x^2 - 5\,x + 6 \;=\; (x-2)(x-3) \quad \leadsto$

$$2\,x^3 - 12\,x^2 + 22\,x - 12 \;=\; 2\,(x-1)(x-2)(x-3)\,.$$

$\longrightarrow$

b) ‘Binomi’ :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

$x = -1$ ist n - fache Nullstelle.

c) Quadratische Gleichung in $u := x^2 \quad \rightsquigarrow$

$$u^2 - (n^2+1)\,u + n^2 = (u-1)(u-n^2)$$

$\Rightarrow$

$$x^4 - (n^2+1)\,x^2 + n^2 = (x^2-1)(x^2-n^2) = (x+1)(x-1)(x+n)(x-n)$$

Nullstellen: $x = -1$, $x = 1$, $x = -n$, $x = n$

Sonderfall $n = 1$: $x = -1$ und $x = 1$ sind doppelte Nullstellen.

d) Lemma 1.2 bzw. Polynomdivision $\rightsquigarrow$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$x = 1$ ist einzige reelle Nullstelle; $x^2 + x + 1$ hat keine reelle Nullstelle. Komplexe Faktorisierung:

$$x^2 + x + 1 = \big(x + \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\big)\big(x + \tfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\big)$$

e) Quadratische Gleichung $\rightsquigarrow$

$$x^2 - (a+b)\,x + a\,b = (x-a)(x-b)$$

Nullstellen: $x = a$, $x = b$.

- Koeffizient bei $x^1 = -(a+b) = -$Summe der Nullstellen
- Koeffizient bei $x^0 = a\,b =$ Produkt der Nullstellen

f) Kubische Gleichung $\rightsquigarrow$ Man errät die Nullstelle $x = a$ (analog $x = b$, c).

$$x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (a\,b + b\,c + c\,a)\,x - a\,b\,c = (x-a)(x-b)(x-c)$$

Nullstellen: $x = a$, $x = b$, $x = c$.

‘Vietà’ - Identitäten (vgl. **e)**) :

- Koeffizient bei $x^2 = -(a+b+c) = -$Summe der Nullstellen
- Koeffizient bei $x^1 = a\,b + b\,c + c\,a =$ Summe aller gemischten Nullstellenpotenzen vom Grad 2
- Koeffizient bei $x^0 = -a\,b\,c = -$Produkt der Nullstellen

□

a) Bestimmen Sie – ggf. mit Computerunterstützung – das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0\ldots 3\}$:

(i) $\{\,(0,0),\ (1,0),\ (2,0),\ (3,0)\,\}$

(ii) $\{\,(0,1),\ (1,0),\ (2,0),\ (3,0)\,\}$

(iii) $\{\,(0,0),\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9)\,\}$

(iv) $\{\,(0,-1),\ (1,0),\ (2,1),\ (3,8)\,\}$

(v) $\{\,(0,e^0),\ (1,e^{-1}),\ (2,e^{-2}),\ (3,e^{-3})\,\}$

b) Werten Sie das unter **a)**, (v) berechnete Polynom $p(x)$ an der Stelle $x = 1/2$ am Rechner mittels des Hornerschemas aus, und berechnen Sie den Interpolationsfehler $p(1/2) - e^{-1/2}$.

c) Zeichnen Sie am Rechner grafisch den Verlauf des unter **a)**, (v) berechneten Polynoms $p(x)$ für $x \in [0,5]$, und vergleichen Sie dies mit dem Verlauf der Funktion e^{-x}. Was beobachten Sie?

---

a) Zu $n+1$ Datenpunkten (x_i, y_i), x_i paarweise verschieden:

Interpolationspolynom vom Grad $\le n$ ist *eindeutig*.

(i) $p(x) = 0$

(ii) $p(x)$ = Lagrange-Polynom zum Knoten $x_0 = 0$:

$$p(x) = \varphi_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\tfrac{1}{6}x^3 + x^2 - \tfrac{11}{6}x + 1$$

(iii) $p(x) = x^2$

(iv) $p(x) = (x-1)^3$

(v) Berechnung von $p(x)$: Entweder mittels Lagrange-Darstellung, oder mit Ansatz

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

und Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 = y_i, \quad i = 0\ldots 3$$

nach den Unbekannten a_0, a_1, a_2, a_3 $\rightsquigarrow$

$a_0 = 1$, $a1 = -0.9161022452$, $a_2 = 0.3260784294$, $a3 = -0.042096743$

$\longrightarrow$

b) Hornerschema:

$$p(x) = a_0 + x\left(a_1 + x\left(a_2 + x\,a_3\right)\right)$$

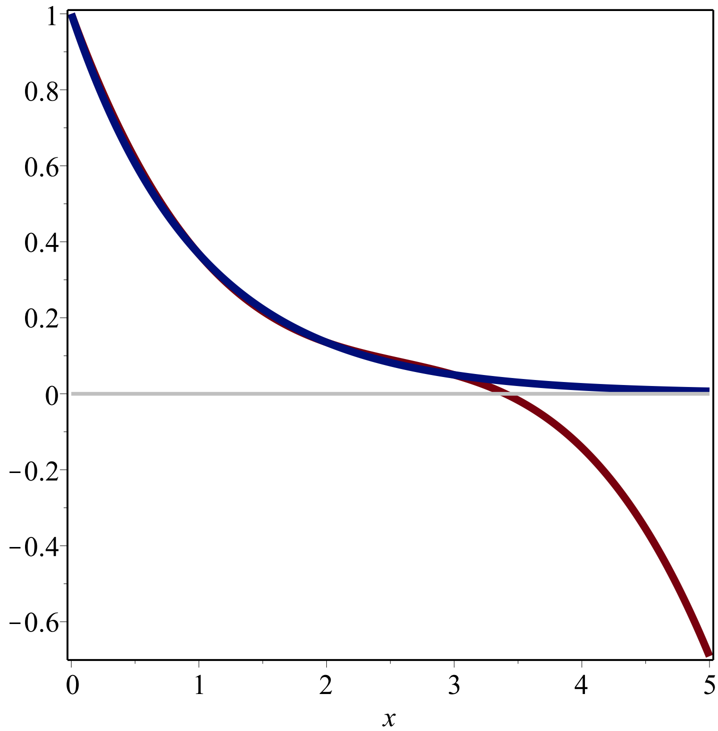
Algorithmus für allgemeinen Grad n: Schleife läuft 'von innen nach außen' (Maple-Code):

```
wert := a[n];
for i from n to 1 by -1 do
    wert := a[i-1] + x*wert
end do;
```

Beispiel: $x = 1/2$

$$p(0.5) = 0.618\ldots, \qquad p(0.5) - \exp(-0.5) = 0.011\ldots.$$

c)



Im Interpolationsintervall $[0, 3]$ ist die Approximation sehr gut; außerhalb wird sie rasch schlechter.

Anmerkung: Man kann rigorose Fehlerabschätzungen herleiten. Der Interpolationsfehler hängt ab von der Auswertungsstelle und einer höheren Ableitung der Funktion, die interpoliert wurde.

Im Allgemeinen: Bessere Approximation durch höheren Polynomgrad.

□

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

a) $\boxed{\dfrac{x^2-1}{x^3-3\,x^2+3\,x-1}}$

b) $\boxed{\dfrac{1}{1-x^4}}$

c) $\boxed{\dfrac{x^2-5\,x+4}{x^3-6\,x^2+11\,x-6}}$

d) $\boxed{\dfrac{1}{x^2-(c+1)\,x+c} \qquad (c\in\mathbb{R})}$

Für welchen Wert von c tritt ein Sonderfall auf? Berücksichtigen Sie diesen separat. Schauen Sie sich auch die PBZ genauer an für den Fall, dass c sehr nahe an diesem Wert liegt. Was fällt Ihnen auf?

---

a) ‘Binomi: $x^3-3\,x^2+3\,x-1 = (x-1)^3 \quad\Rightarrow$

$$\frac{x^2-1}{x^3-3\,x^2+3\,x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^3} = \frac{x+1}{(x-1)^2}$$

Ansatz für PBZ:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$\leadsto$

$$x+1 = A\,(x-1)+B = A\,x+(B-A)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B-A &= 1 \qquad\Rightarrow\qquad B = 1+A = 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ PBZ:

$$\frac{x^2-1}{x^3-3\,x^2+3\,x-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

$\longrightarrow$

b) Mit $1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2) = -(x-1)(x+1)(x^2+1)$

$\rightsquigarrow$ Ansatz für (reelle) PBZ:

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$1 = -A\,(x+1)(x^2+1) - B\,(x-1)(x^2+1) - (Cx+D)\,(x^2-1)$$

Nullstellen des Nenners einsetzen, dann noch (z.B.) $x = 0$:

$$x = 1: \quad 1 = -4A \quad \Rightarrow \quad A = -\tfrac{1}{4}$$

$$x = -1: \quad 1 = 4B \quad \Rightarrow \quad B = \tfrac{1}{4}$$

$$x = 0: \quad 1 = -A + B + C = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + C \quad \Rightarrow \quad C = \tfrac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ PBZ:

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{4\,(1-x)} + \frac{1}{4\,(1+x)} + \frac{1}{2\,(1+x^2)}$$

c) Mit

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4),$$
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$\rightsquigarrow$

$$\frac{x^2-5x+4}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{(x-1)}(x-2)(x-3)} = \frac{(x-4)}{(x-2)(x-3)}$$

Ansatz für PBZ:

$$\frac{(x-4)}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$\rightsquigarrow$

$$x - 4 = A\,(x-3) + B\,(x-2)$$

Nullstellen des Nenners einsetzen:

$$x = 2: \quad -2 = -A \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

$$x = 3: \quad -1 = B \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

$\Rightarrow$ PBZ:

$$\frac{x^2-5x+4}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3}$$

$\longrightarrow$

d) Mit

$$x^2-(c+1)\,x+c \;=\; (x-1)(x-c)$$

$\rightsquigarrow$ 2 Fälle:

(i) $c \neq 1$:

$$\frac{1}{(x-1)(x-c)} \;=\; \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-c} \;=\; \dots \;=\; \frac{1}{1-c}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-c}\right)$$

(ii) Sonderfall $c=1$:

$$\frac{1}{(x-1)(x-1)} \;=\; \frac{1}{(x-1)^2}$$

Für $c \;=\; 1+\varepsilon$:

$$\frac{1}{1-c}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-c}\right) \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x-(1+\varepsilon)}-\frac{1}{x-1}\right)$$

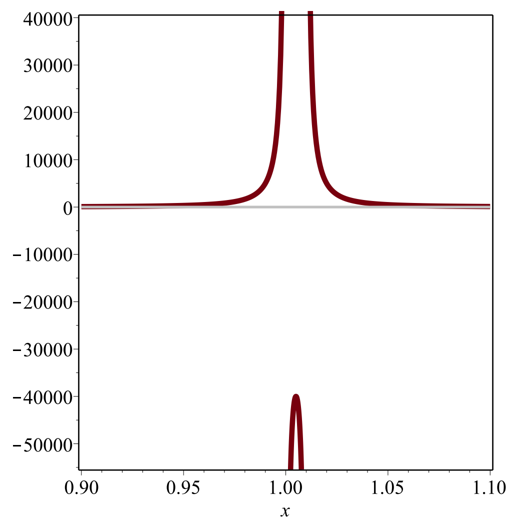
Für $\varepsilon \to 0$ wird dieser Ausdruck unbestimmt, '$\infty \cdot 0$'.

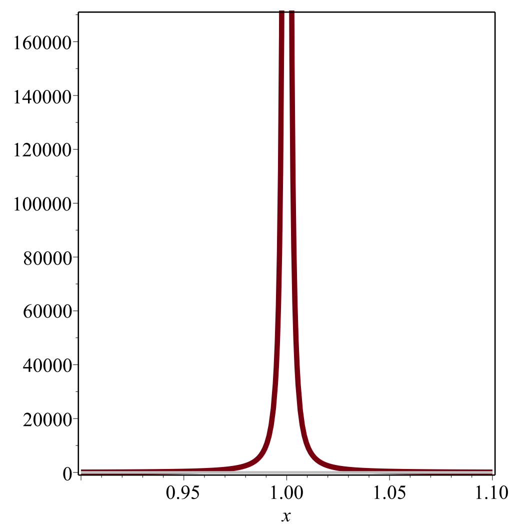
Erst nach Umformung (auf gleichen Nenner bringen und Vereinfachen) erkennt man wiederum

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x-(1+\varepsilon)}-\frac{1}{x-1}\right) \;=\; \frac{1}{(x-1)^2}\,.$$

Zwei Pole 1. Ordnung verschmelzen für $\varepsilon \to 0$ zu einem Pol 2. Ordnung.

Verlauf für $\varepsilon = 1/100$ (links) und $\varepsilon = 0$ (rechts):





□

a) Überlegen Sie sich basierend auf der Definition der Euler'schen Zahl e eine Funktion $f(t)$, für die gilt

$$\boxed{\lim_{t \to 0+} f(t) = e}$$

wobei $f(0)$ nicht direkt auswertbar ist (hebbare Unstetigkeit). Approximieren Sie nun e numerisch, indem Sie $f(t)$ an den Stellen $t = 1/2,\ 1/4,\ 1/6$ durch ein Polynom vom Grad 2 interpolieren und dieses an der Stelle $t = 0$ auswerten (sogenannte *Extrapolation*).

b) Die unter **a)** berechnete Approximation von e ist nicht sehr genau. Wie könnte man sie verbessern?

c) Alternativ dazu könnte man daran denken, den Wert von $f(t)$ für sehr kleine $t = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$) als Approximation für $f(0) = e$ zu verwenden. Testen Sie es am Rechner aus aus für $n = 10^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wie verhält sich der Fehler $f(1/n) - f(0)$ mit wachsendem k? Wie sieht es mit dem Rechenaufwand aus?

---

a) $e = \lim_{t \to 0+} f(t)$ für $f(t) = (1+t)^{1/t}$

Extrapolation wie in Angabe spezifiziert $\rightsquigarrow$

$$e \approx p(0) \approx 2.707, \qquad e - p(0) \approx 0.01$$

b) Verbesserung z.B. so:

(i) Auswertungsstellen näher an 0, z.B. $t = 1/10,\ 1/20,\ 1/30$ $\rightsquigarrow$

$$e \approx p(0) \approx 2.7181, \qquad e - p(0) \approx 0.0001$$

(ii) Wähle mehr Auswertungsstellen und höheren Polynomgrad.

Z.B. Auswertung an $t = 1/2,\ 1/4,\ 1/6,\ 1/8$, Polynomgrad 3 $\rightsquigarrow$

$$e \approx p(0) \approx 2.717, \qquad e - p(0) \approx 0.001$$

(iii) Mit Auswertung an $t = 1/100,\ 1/200,\ 1/300,\ 1/400$ und Polynomgrad 3 wird die Approximation bereits sehr genau:

$$e \approx p(0) \approx 2.718281828, \qquad e - p(0) \approx 5\,\mathrm{E}{-10}$$

Auswertung von $f(t) = \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$ etc. hier schon relativ aufwendig.

Anmerkung: Den Fehler kann man analysieren, d.h., man kann vorhersagen, welche Variante wie genau ist.

$\longrightarrow$

c) Test am Rechner zeigt:

$$e - \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \quad \text{proportional zu} \quad \tfrac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ Benötige $n \approx 10^{10} = 10000000000 \approx 2^{33}$ für 10 richtige Stellen!

Erfordert Auswertung von

$$\left(1 + \tfrac{1}{10000000000}\right)^{10000000000} \qquad ☹$$

Nicht sehr praktikabel.

$\square$

a) Eine zeitabhängige Größe sei exponentiell wachsend gemäß der Funktion

$$\boxed{f(t) = e^{\lambda t}, \quad t \geq 0}$$

wobei $\lambda > 0$. Sei $t \geq 0$ irgendein Zeitpunkt. Bestimmen Sie Δt so, dass $f(t + \Delta t) = 2\, f(t)$, d.h. nach einem weiteren Zeitintervall Δt hat sich der Funktionswert verdoppelt. Hängt die Lösung Δt von t ab?

b) Gleiche Frage wie unter **a)**, mit $\lambda < 0$ (exponentielles Abklingen) und Halbierung statt Verdoppelung.

c) [Prüfungsaufgabe, 2014:]

Für die Strahlungsintensität $I(t)$ einer radioaktiven Substanz gelte [a]

$$\boxed{I(t) = e^{\alpha_1 t}\, I(0) \quad \text{für} \quad t \in [0, t_1]\,.}$$

Für $t > t_1$ verändert sich diese, und es gelte

$$\boxed{I(t) = e^{\alpha_2 (t - t_1)}\, I(t_1) \quad \text{für} \quad t \in [t_1, t_2]\,.}$$

Geben Sie $\beta \in \mathbb{R}$ an, so dass $I(t_2) = e^{\beta t_2}\, I(0)$. Schreiben Sie β in der Form $\beta = \alpha_1\, c_1 + \alpha_2\, c_2$ mit passenden c_1 und c_2.

d) Sei $\varphi(x)$ eine berechenbare Approximation für e^x auf dem Intervall $[0, \ln 2]$ (z.B. ein Interpolationspolynom). Wie gewinnt man daraus eine Approximation für e^x für beliebige $x \in \mathbb{R}$? Spezifizieren Sie einen entsprechenden Algorithmus.

e) In der Standard-Arithmetik (Gleitpunktarithmetik, *double precision*) auf gängigen Mikroprozessoren kann man (endlich viele) Zahlen im Bereich von etwa $[10^{-300}, 10^{300}]$ darstellen. Geben Sie ein Intervall $[a, b]$ an, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $e^x \in [10^{-300}, 10^{300}]$.

---

a) $\rightsquigarrow$

$$f(t + \Delta t) \;=\; e^{\lambda (t + \Delta t)} \;=\; e^{\lambda t}\, e^{\lambda \Delta t} \;=\; f(t)\, e^{\lambda \Delta t}$$

$\Rightarrow$

$$f(t + \Delta t) \;=\; 2\, f(t) \quad \text{für} \quad e^{\lambda \Delta t} \;=\; 2, \qquad \text{d.h.} \quad \Delta t \;=\; \frac{\ln 2}{\lambda}$$

<u>unabhängig</u> von t.

$\longrightarrow$

[a] $I(0)$ ist die Strahlungsintensität zum Zeitpunkt $t = 0$.

b) $\leadsto$

$$f(t+\Delta t) = e^{\lambda(t+\Delta t)} = e^{\lambda t}\, e^{\lambda \Delta t} = f(t)\, e^{\lambda \Delta t}$$

$\Rightarrow$

$$f(t+\Delta t) = \tfrac{1}{2} f(t) \quad \text{für} \quad e^{\lambda \Delta t} = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{d.h.} \quad \Delta t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\lambda} = \frac{\ln 2}{|\lambda|}$$

unabhängig von t. $\ldots$ Δt = 'Halbwertzeit'

c) Mit

$$I(t) = e^{\alpha_1 t}\, I(0) \quad \text{für} \quad t \in [0, t_1],$$

$$I(t) = e^{\alpha_2 (t-t_1)}\, I(t_1) \quad \text{für} \quad t \in [t_1, t_2]$$

gilt

$$I(t_2) = e^{\alpha_2 (t_2-t_1)}\, e^{\alpha_1 t_1}\, I(0) = e^{\alpha_2 (t_2-t_1)+\alpha_1 t_1}\, I(0) = e^{\beta t_2}\, I(0),$$

wobei

$$\beta = \frac{\alpha_2 (t_2 - t_1) + \alpha_1 t_1}{t_2} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\, t_1 + \alpha_2 t_2}{t_2} = \alpha_1 \frac{t_1}{t_2} + \alpha_2 \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right)$$

$\ldots$ Konvexkombination von α_1 und α_2.

d) Für $x > 0$: Bestimme $\xi \in [0, \ln 2)$ und $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$x = n \ln 2 + \xi, \qquad \text{d.h.} \quad \frac{x}{\ln 2} = n + \frac{\xi}{\ln 2}$$

Dann:

$$e^x = e^{n \ln 2 + \xi} = 2^n\, e^{\xi} \approx 2^n\, \varphi(\xi), \qquad \xi \in [0, \ln 2).$$

Beispiel: $x = 10$

$$\frac{x}{\ln 2} = \frac{10}{0.693\ldots} = 14.42\ldots; \quad \xi = 0.42\ldots \cdot \ln 2$$

$\Rightarrow$

$$10 = 14 \ln 2 + 0.42\ldots \cdot \ln 2 \approx 14 \ln 2 + 0.29\ldots \qquad \Rightarrow \qquad e^{10} = 2^{14}\, e^{0.29\ldots}$$

Für $x < 0$ ist $e^x = 1 / e^{-x}$.

e) $\leadsto$

$$e^x = 10^{\pm 300} = e^{\pm 300 \ln 10} \approx e^{\pm 300 \cdot 2.3} = e^{\pm 690}$$

$\Rightarrow$ Für $[a, b] \approx [-690, 690]$ gilt $e^x \in [10^{-300}, 10^{300}]$. $\square$

a) Stark wachsende oder fallend Exponentialfunktionen $f(x)$ lassen sich nicht gut direkt grafisch darstellen, weil ihre Werte über viele Größenordnungen variieren. Man wählt daher eine logarithmische Darstellung, d.h. man zeichnet z.B. $\log_{10}(f(x))$.

Sei $\boxed{f(x) = a^x, \quad x \geq 0}$

wobei $a > 0$. Beschreiben Sie genau, wie der Verlauf von $\log_{10}(f(x))$ aussieht. Was ergibt sich speziell für $a = 10^k$ $(k \in \mathbb{Z})$?

b) Für eine Potenzfunktion $\boxed{f(x) = x^a, \quad x > 0}$, mit $a \in \mathbb{R}$, eignet sich eine *doppelt-logarithmische* Darstellung:

Setze $\xi = \ln x$ und $\eta = \ln(f(x))$. Dann entspricht die Funktion $f(x) = a\,x$ einer Funktion $\eta = g(\xi)$. Geben Sie die Funktion g an.

Angenommen, Sie kennen den Wert von a nicht – wie können Sie diesen aus der doppelt-logarithmischen Darstellung ablesen?

---

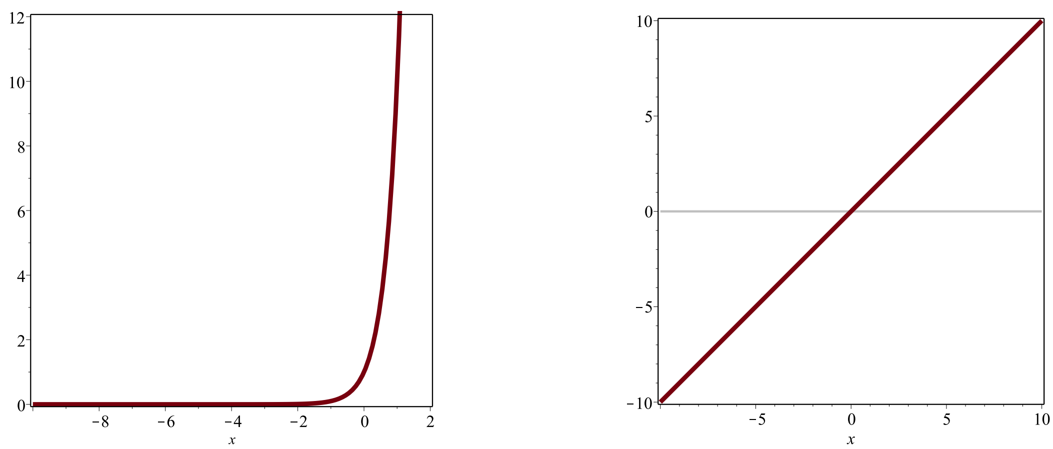
a) $f(x) = a^x$:

$$\log_{10}(a^x) = x \log_{10}(a) \qquad \text{geradliniger Verlauf, Steigung } \log_{10}(a)$$

Speziell für $a = 10^k$:

$$\log_{10}(a^x) = x \log_{10}(10^k) = x\,k \qquad \text{Gerade mit Steigung } k$$

Grafik: Normale und logarithmische Darstellung $(a = 10)$:



$\longrightarrow$

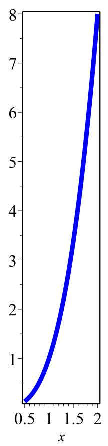
b) Mit

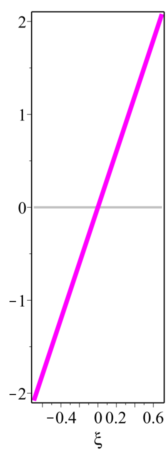
$$\eta \;=\; \ln(x^a) \;=\; a \ln x \;=\; a\,\xi$$

$\rightsquigarrow$

a ist die Steigung der Geraden $\eta = g(\xi) = a\,\xi$, ablesbar aus der doppelt-logarithmischen Darstellung (= Graph von g).

Grafik: Normale und doppelt-logarithmische Darstellung ($a = 3$), für $x \in [\frac{1}{2}, 2]$:





$\square$

Sei $W(x)$ definiert als die Umkehrfunktion von $f(x) = x\,e^x,\ \ x \geq 0$. Diese ist nicht in elementarer Weise darstellbar aber wohldefiniert, und wir nehmen sie als neue Funktion in unseren Zoo von Standardfunktionen auf.

a) (i) Zeigen Sie: $W(x)$ ist strikt monoton wachsend für $x \geq 0$.

(ii) Drücken Sie $\ln(W(x))$ mittels $\ln x$ und $W(x)$ aus und bestimmen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{W(x)}\,.$$

b) (i) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x = e^{-x}$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

(ii) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x^2 = e^{-x}$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

$W(x)$ heißt <u>*Lambert W - Funktion.*</u>

a) (i) $x\,e^x$ strikt monoton wachsend $\Rightarrow$
Umkehrfunktion $W(x)$ strikt monoton wachsend.

(ii) Mit $x = W(x)\,e^{W(x)}$:

$$\ln x \;=\; \ln\!\left(W(x)\,e^{W(x)}\right) \;=\; \ln W(x) + W(x)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\ln(W(x))}{W(x)} = \frac{\ln x}{W(x)} - 1$$

Für $x \to \infty$ (somit $W(x) \to \infty$) geht linke Seite gegen 0 [a] $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{W(x)} = 1\,.$$

b) [Skizze:] Beide gesuchten Lösungen sind > 0 und eindeutig.

(i) $x = e^{-x} \;\Leftrightarrow\; x\,e^x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = W(1)$

(ii) Rechne mit $\frac{x}{2} =: y$:

$$x^2 = e^{-x} \;\Leftrightarrow\; 4\,y^2 = e^{-y-y} = e^{-y}\,e^{-y} \;\Leftrightarrow\; 2\,y = e^{-y}$$

$$\Leftrightarrow\; y\,e^y = \tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; y = W(\tfrac{1}{2}) \;\Leftrightarrow\; x = 2\,W(\tfrac{1}{2})$$

$\square$

---

[a] Dies folgt aus $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, siehe Vorlesung, Kap. 9; dies kann auch direkt argumentiert werden (in UE).

a) Beweisen Sie die Identitäten

(i) $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$ | (ii) $2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$

b) Beweisen Sie die Identitäten

(iii) $4\cos^3 x = 3\cos x + \cos(3x)$ | (iv) $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin(3x)$

Additionstheorem für cos, sin $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x\\ \sin(2x) &= 2\sin x\cos x\end{aligned}$$

a) Additionstheorem $\Rightarrow$

(i) $2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$ $\checkmark$

(ii) Weiters:

$$2\sin^2 x = 2 - 2\cos^2 x = 2 - (1 + \cos(2x)) = 1 - \cos(2x) \quad \checkmark$$

b) (i) Additionstheorem für cos $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(x + 2x) = \cos x\cos(2x) - \sin x\sin(2x)\\ &= \cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) - \sin x\left(2\sin x\cos x\right)\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x\cos x\\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\left(1 - \cos^2 x\right)\cos x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \quad \checkmark\end{aligned}$$

(ii) Additionstheorem für sin $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(x + 2x) = \sin x\cos(2x) + \cos x\sin(2x)\\ &= \sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \cos x\left(2\sin x\cos x\right)\\ &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x\\ &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x\left(1 - \sin^2 x\right)\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \checkmark\end{aligned}$$

$\square$

Zeichnen Sie die folgenden ‘modulierten’ trigonometrischen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$:

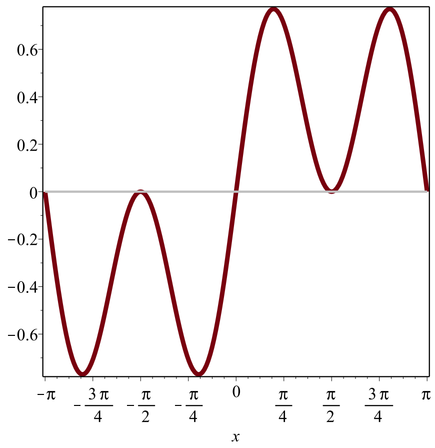
a) $\boxed{\cos x \, \sin(2\,x)}$

b) $\boxed{\sin x \, \sin(2\,x)}$

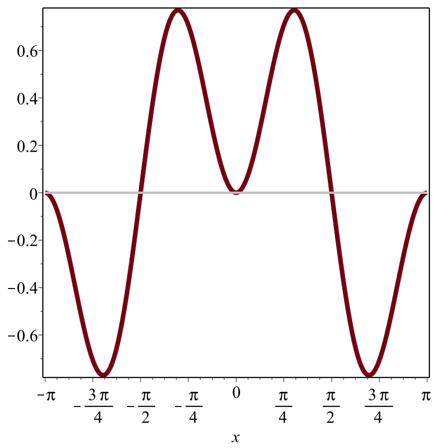
c) $\boxed{\sin x \, \cos(n\,x)}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ‘groß’

---

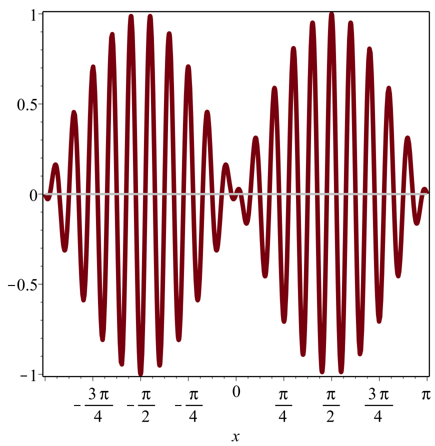
a) Die Funktion ist ungerade.



b) Die Funktion ist gerade.



c) Eine *Schwebung* (Bild: $n = 20$)



□

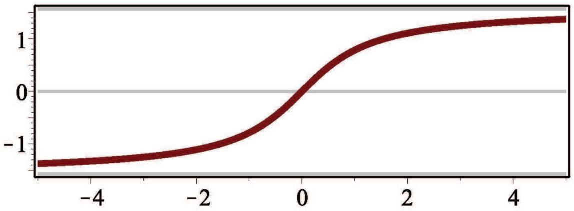
Jeder Punkt (x, y) auf einem Kreis in der Ebene mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r ist in Polarkoordinaten eindeutig darstellbar als $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Spezifizieren Sie eine Funktion

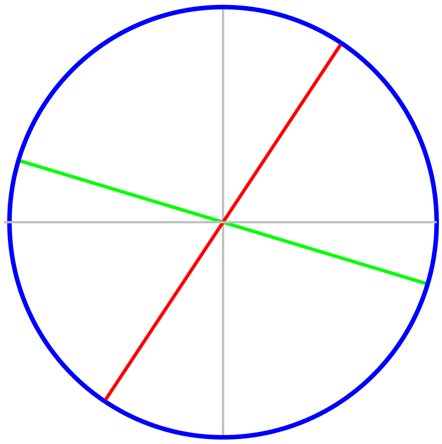
$$\boxed{\operatorname{atan2}(y, x)}$$

in den zwei Variablen y und x, die zu beliebigen gegebenem (x, y) auf dem Einheitskreis den entsprechenden Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ zurückliefert.

Was ist $\operatorname{atan2}(0, 0)$?



$\arctan x$



Winkel φ in 4 Quadranten

- Spezielle Werte:

$$\operatorname{atan2}(0, x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \pi, & x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{atan2}(y, 0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & y < 0 \end{cases}$$

- Werte in den 4 Quadranten:

$$\varphi = \operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), & x > 0,\ y > 0 \quad \text{(I)}, \quad \text{Wert} \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi, & x < 0,\ y > 0 \quad \text{(II)}, \quad \text{Wert} \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi, & x < 0,\ y < 0 \quad \text{(III)}, \quad \text{Wert} \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ \arctan(\frac{y}{x}), & x > 0,\ y < 0 \quad \text{(IV)}, \quad \text{Wert} \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$$

- $\operatorname{atan2}(0, 0)$ ist nicht wohldefiniert.

$\square$