a) Sei f eine differenzierbare Funktion. Geben Sie für

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(f(x^3)\right)^c \quad (c \in \mathbb{R})}$$

einen expliziten Formelausdruck an (in Abhängigkeit von f und f').

b) Beweisen Sie die Identität

$$\boxed{\frac{d}{dx}\, e^x \;=\; e^x \quad (x \in \mathbb{R})}$$

indem Sie von der Ableitungsformel für $\ln x$ ausgehen.

c) Für zwei differenzierbare Funktionen $f(y)$ und $y(x)$ gelte

$$\boxed{f(y(x)) \;\equiv\; \text{const.}}$$

Geben Sie eine hinreichende Bedingung an f an, so dass gilt $y(x) \;\equiv\; \text{const.}$

---

a) Kettenregel $\rightsquigarrow$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x^3)\right)^c \;=\; c\left(f(x^3)\right)^{c-1} \cdot f'(x^3) \cdot 3\,x^2$$

b) $f(x) = \ln x \;\; (x > 0)$; $\;\; f^{-1}(y) = e^y \;\; (y \in \mathbb{R},\; f^{-1}(y) > 0)$. Aus

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dy}\, f^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

folgt

$$\frac{d}{dy}\, e^y \;=\; \frac{1}{\frac{1}{e^y}} \;=\; e^y \qquad \checkmark$$

c) Kettenregel $\rightsquigarrow$

$$\frac{d}{dx}\, f(y(x)) \;=\; f'(y(x)) \cdot y'(x) \;=\; 0 \;\; \text{laut Voraussetzung } f(y(x)) \equiv \text{const.}$$

$\Rightarrow$

$$y'(x) \equiv 0 \quad \text{falls} \;\; f'(y) \neq 0 \;\; \text{für alle } y$$

$\Rightarrow$

$$y(x) \equiv \text{const.} \;\; \text{falls} \;\; f'(y) \neq 0 \;\; \text{für alle } y$$

(ist nur hinreichende Bedingung.) $\square$

a) Seien f und g zweimal differenzierbare Funktionen. Berechnen Sie

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\, f\big(g(x)\big)}$$

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare [un]gerade Funktion. Ist dann auch die Ableitung $f'(x)$ [un]gerade? Beweisen Sie ein entsprechendes Resultat.

c) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$\boxed{f(x) \;=\; \frac{5\sin(3x + b\sqrt{x^2+e^{2x}})\,\tan\!\left(\frac{k^2x^2}{1+u^2x^2}\right) + \sqrt[3]{\frac{ax-\ln x}{a^2+x^2}}}{\arccos\!\left(\frac{x}{\sqrt{3+x}}\right) + \frac{3a^2x^3}{\arctan(1/x)} + e^{-\frac{x^2-b^2}{2}}\,\arcsin\sqrt{\frac{3x}{1-x^2}}}}$$

---

a) Kettenregel & Produktregel $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\, f(g(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\, f(g(x))\right) \\
&= \frac{d}{dx}\Big(f'(g(x))\cdot g'(x)\Big) \\
&= f''(g(x))\, g'(x)^2 + f'(g(x))\, g''(x)
\end{aligned}$$

b) [Skizze:]

Die Ableitung einer geraden Funktion ist ungerade (und umgekehrt).

Beweis: Für beliebige x gilt

$$\begin{aligned}
f'(-x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h} = -f'(x)
\end{aligned}$$

Analog umgekehrt.

c) ☹

$\square$

a) Seien f und g zwei auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(0) = g(0)$ und $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Führen Sie das Additionstheorem für den Sinus auf das Additionstheorem für den Cosinus zurück.

c) $(*)$ Sei $x \in (-1, 1)$. Differenzieren Sie

$$\boxed{f(x) = 2 \arctan x, \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right)}$$

Was schließen Sie daraus?

---

a) Mittelwertsatz $\Rightarrow$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$(f-g)(x_1) - (f-g)(x_2) \;=\; (f'-g')(\xi)\cdot(x_1 - x_2) \;=\; 0 \quad (\xi \in [x_1, x_2])$$

Für $x_1 = x$ und $x_2 = 0$ folgt $f(x) = g(x)$. ✓

Analog für $f(x_0) = g(x_0)$ mit beliebigem x_0 statt $x_0 = 0$.

b) Verwende **a)**: Sei

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x+y) \\ g(x) &= \sin x\,\cos y + \cos x\,\sin y, \quad \text{mit} \quad f(0) = g(0) = \sin y \end{aligned}$$

Differenzieren $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x+y) \\ g'(x) &= \cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y \;=\; \cos(x+y) \;=\; f'(x) \end{aligned}$$

aufgrund des Additionstheorems für cos.

Mit **a)** folgt $f(x) \equiv g(x)$. ✓

$\longrightarrow$

c) Zunächst gilt $f(0) = g(0) = 0$.

Differenzieren $\leadsto$

$$\frac{d}{dx}\left(2\arctan x\right) = \frac{2}{1+x^2}\,,$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right) = \frac{\frac{2\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2}{1+x^2}\,\frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1+x^2}\right)^2-\left(\frac{2\,x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{1+x^2}\,\frac{1-x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-4\,x^2}}$$

$$= \frac{2}{1+x^2}\,\underbrace{\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}}_{=1}$$

$\Rightarrow \quad f'(x) \equiv g'(x),\ \ x \in (-1,1)$

Mit **a)** folgt

$$f(x) \equiv g(x) \quad \text{für} \quad x \in (-1,1)\,.$$

$\square$

Unter welchen Voraussetzungen an die Funktion $f(x)$ existieren die Grenzwerte

$$\textbf{a)}\ \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\,h}\,, \qquad \textbf{b)}\ \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2\,f(x)+f(x-h)}{h^2}\ ?$$

Wie lautet dann jeweils der Grenzwert?

---

a) Symmetrischer Differenzenquotient:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\,h} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \Big) \\
&= \frac{1}{2} \Big(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \Big) = f'(x)
\end{aligned}$$

für f differenzierbar an x, bzw.

$$\tfrac{1}{2}\,(f'_+(x) + f'_-(x))$$

falls f an x nur links- und rechtsseitig differenzierbar.

b) Zweiter zentraler Differenzenquotient:

Verwende de l'Hospital (x fest; differenzieren nach h (!)):

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2\,f(x)+f(x-h)}{h^2} \\
&\overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2\,h} = f''(x)
\end{aligned}$$

für f zweimal differenzierbar an x (vgl. **a)**).

$\square$

Berechnen Sie die in UE 4, Aufgabe 7 betrachteten Grenzwerte (sofern sie existieren) mit Hilfe der Regel von de l'Hospital. Geht es auch direkter?

a) $\boxed{f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}\,, \quad n \in \mathbb{N}}$ (stetige Fortsetzung an $x = 1$)

b) —

c) $\boxed{f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}}$ (stetige Fortsetzung an $x = 0$)

d) $\boxed{f(x) = \dfrac{(1+x)^{1/3} - (1 + \frac{1}{3}\,x)}{x^2}}$ (stetige Fortsetzung an $x = 0$)

---

a) Mit de l'Hospital (0/0) :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{n\,x^{n-1}}{1} = n$$

Direkter: Mit $f(x) = x^n \quad \rightsquigarrow$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{d}{dx}\, f(x)\Big|_{x=1} = n\,x^{n-1}\Big|_{x=1} = n$$

b) —

c) Mit de l'Hospital (0/0) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/2} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\,(1+x)^{-1/2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Direkter: Mit $f(x) = (1+x)^{1/2} \quad \rightsquigarrow$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/2} - 1}{x} = \frac{d}{dx}\, f(x)\Big|_{x=0} = \tfrac{1}{2}\,(1+x)^{-1/2}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

d) Zweimal de l'Hospital (0/0) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/3} - (1 + \frac{1}{3}\,x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}\,(1+x)^{-2/3} - \frac{1}{3}}{2\,x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2}{9}\,(1+x)^{-5/3}}{2} = -\frac{1}{9}$$

Alternative: Taylor-Entwicklung (später)

$$\frac{(1+x)^{1/3} - (1 + \frac{1}{3}\,x)}{x^2} = \frac{\big(1 + \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9}\,x^2 + \mathcal{O}(x^3)\big) - \big(1 + \frac{1}{3}\,x\big)}{x^2} \to -\frac{1}{9} \quad \square$$

a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade $g(x) = c\,x$ den Graphen der Funktion $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = \xi > 0$ berührt. Geben Sie auch die Stelle ξ an.

b) Gegeben sei die Funktion $\boxed{f(x) = x^2\, e^{|x|}}$

Für welches $n \in \mathbb{N}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ k mal stetig differenzierbar für alle $k \le n$? Untersuchen Sie für dieses n auch das Verhalten von $f^{(n+1)}$.

---

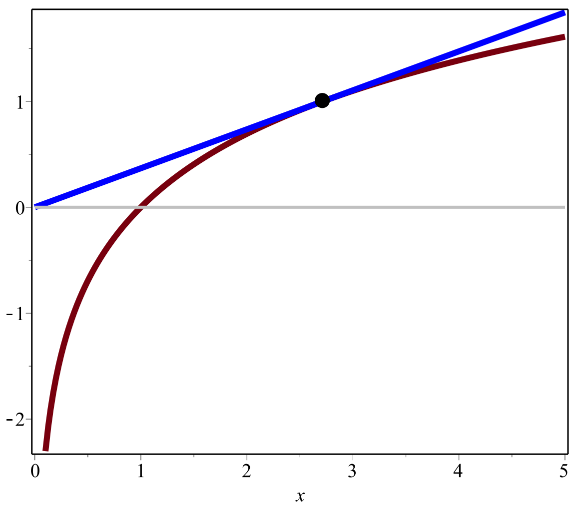
a) Zwei Gleichungen für $c,\ \xi$:

$$f(\xi) = g(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\xi = c\,\xi\,,$$

$$f'(\xi) = g'(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\xi} = c$$

$\rightsquigarrow$

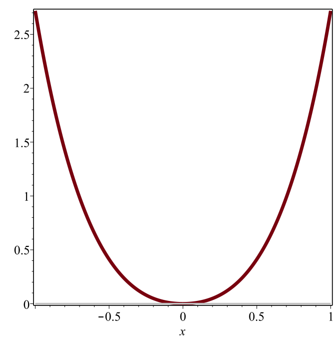
$$c\,\xi = 1,\quad \ln\xi = 1 \quad \Rightarrow \quad \xi = e,\quad c = \frac{1}{e}$$



$\longrightarrow$

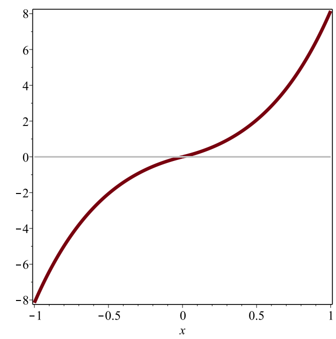
b) Mit

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x^2\, e^{-x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2\, e^{x}, & x > 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow \quad f$ stetig (auch an $x = 0$).

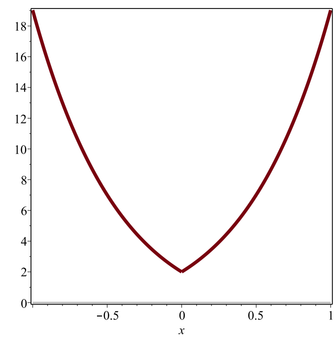
Weiters:



$$f'(x) \;=\; \begin{cases} (2\,x - x^2)\, e^{-x}, & x < 0, \\ (2\,x + x^2)\, e^{x}, & x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad f'(x)$ stetig fortsetzbar an $x = 0$, mit $f'(0) = 0$.

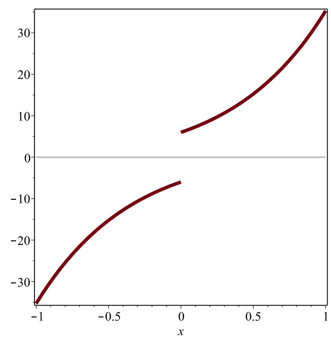
Weiters:



$$f''(x) \;=\; \begin{cases} (x^2 - 4\,x + 2)\, e^{-x}, & x < 0, \\ (x^2 + 4\,x + 2)\, e^{x}, & x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad f''(x)$ stetig fortsetzbar an $x = 0$, mit $f''(0) = 2$.

Weiters:



$$f'''(x) \;=\; \begin{cases} -(x^2 - 6\,x + 6)\, e^{-x}, & x < 0, \\ (x^2 + 6\,x + 6)\, e^{x}, & x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad f'''(x)$ unstetig an $x = 0$,

mit $f(0-) = -6$, $f(0+) = 6$.

$\square$

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass der Graph der Funktion

$$\boxed{f(x) \;=\; \big(1+x\big)^{\frac{1}{n}} \quad (n=2,3,4,\ldots)}$$

für $x>0$ unterhalb seiner Tangente an der Stelle $x=0$ verläuft. Haben Sie auch einen alternativen Beweis anzubieten?

b) Die Euler'sche Zahl e ist definiert als $\lim\limits_{n\to\infty}\big(1+\frac{1}{n}\big)^n$. Wir betrachten nun die Funktion

$$\boxed{f(t) \;=\; \big(1+t\big)^{1/t}} \qquad \text{(vgl. UE 5, Aufgabe 4).}$$

Zeigen Sie, dass tatsächlich gilt $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = e$.

c) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f(t)$ aus **b)** an der Stelle $t=0$ stetig fortsetzbar ist, und berechnen Sie den entsprechenden Wert $f'(0)$.

Zusatzfrage: Was folgern Sie daraus für die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$ gegen e? (Vgl. UE 5, Aufgabe 4.)

---

a) Zu zeigen:

$$\big(1+x\big)^{\frac{1}{n}} \;<\; 1+\frac{x}{n}$$

Mittelwertsatz $\Rightarrow$ Für $f(x) = \big(1+x\big)^{\frac{1}{n}}$ gilt

$$f(x) - \underbrace{f(0)}_{=\,1} \;=\; f'(\xi)\,(x-0), \qquad f'(x) = \tfrac{1}{n}\,\big(1+x\big)^{\frac{1}{n}-1}$$

mit $\xi\in[0,x]$. $\Rightarrow$

$$\big(1+x\big)^{\frac{1}{n}} \;=\; 1+\tfrac{x}{n}\,\big(1+\xi\big)^{\frac{1}{n}-1}$$

$\Rightarrow$ für $x>0$:

$$1+\tfrac{x}{n}\,\big(1+\xi\big)^{\frac{1}{n}-1} \;=\; 1+\frac{x}{n\,\underbrace{\big(1+\xi\big)^{1-\frac{1}{n}}}_{\geq\,1}} \;\leq\; 1+\frac{x}{n} \qquad \checkmark$$

Wobei: '=' gilt nur für $x=0$:

$x=0$ ist einzige Lösung der Gleichung $\big(1+x\big)^{\frac{1}{n}} = 1+\frac{x}{n}$ für $x\geq 0$.

Beweis mittels 'Binomi':

$$1+x \;\leq\; \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \;=\; 1+n\,\frac{x}{n}+\ldots$$

... ergibt auch alternativen direkten Beweis von **a)**.

$\longrightarrow$

b) Für $f(t) \;=\; \left(1+t\right)^{1/t} \;=\; e^{\frac{1}{t}\,\ln(1+t)}$:

$$\lim_{t\to 0} f(t) \;=\; \exp\left(\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$

mit [de l'Hospital]

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+t}}{1} \;=\; 1$$

$\Rightarrow$ wegen Stetigkeit von exp :

$$\lim_{t\to 0} f(t) \;=\; \exp(1) \;=\; e \qquad \checkmark$$

c) Ableitung von $f(t) = \left(1+t\right)^{1/t}$:

$$f'(t) \;=\; f(t)\,g(t), \quad \text{mit} \quad g(t) \;=\; \frac{d}{dt}\,\frac{\ln(1+t)}{t} \;=\; \frac{\frac{t}{1+t} - \ln(1+t)}{t^2}\,,$$

$$\lim_{t\to 0} f'(t) \;=\; \underbrace{\lim_{t\to 0} f(t)}_{=\,e} \cdot \lim_{t\to 0} g(t)$$

Zweimal de l'Hospital für g $\rightsquigarrow$

$$\lim_{t\to 0} g(t) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t}{1+t} - \ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\; \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{t}{(1+t)^2}}{2\,t}$$

$$=\; \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t-1}{(1+t)^3}}{2} \;=\; -\,\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{t\to 0} f'(t) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt}\left(1+t\right)^{1/t} \;=\; -\,\frac{e}{2}$$

Folgerung: Für $t \to 0$ gilt

$$f(t) \;=\; f(0) + t\,f'(0) + o(|t|), \quad \text{also} \quad f(0) \;\approx\; f(t) + \frac{e}{2}\,t$$

$\Rightarrow$ mit $t = 1/n$:

$$e \;\approx\; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{e}{2\,n} \quad \text{für} \quad n \to \infty\,.$$

Die Konvergenz ist relativ langsam :

Fehler nimmt etwa proportional zu $1/n$ ab. $\square$

a) Frau D. sitzt im Donaupark in der Wiese und misst ihre Entfernung zum Donauturm: a m. Dann misst sie von ihrer Position aus den Winkel α zwischen Boden und Turmspitze. Daraus errechnet sie die Höhe h des Turmes (als einfachen Funktionsausdruck in a und α).

Welchen Effekt haben unvermeidliche kleine Störungen in der Messung von a bzw. α auf das Ergebnis in dem errechneten Wert für h? Welche Standorte von Frau D. wirken sich sehr ungünstig auf die Genauigkeit des Ergebnisses aus?

b) Drücken Sie das Ergebnis aus **a)** mit Hilfe von h (fest, 252 m) und α aus. Wie würden Sie α in etwa wählen, damit die Fehleranfälligkeit möglichst gering ist? Begründen Sie Ihre Wahl.

---

a) [Skizze:]

$$\tan\alpha = \frac{h}{a} \qquad \Rightarrow \qquad h = a \tan\alpha$$

Auswertung der Funktion

$$g(a,\alpha) := a \tan\alpha$$

für gemessene Werte von a und α ergibt die (Schätzung für) die exakte Höhe h.

Für exakte Werte von a, α und kleine Störungen (Messfehler) Δa, $\Delta\alpha$ gilt

$$g(a+\Delta a,\alpha) \approx g(a,\alpha) + \frac{\partial g}{\partial a}(a,\alpha)\cdot\Delta a,$$

$$g(a,\alpha+\Delta\alpha) \approx g(a,\alpha) + \frac{\partial g}{\partial \alpha}(a,\alpha)\cdot\Delta\alpha$$

mit den *Verstärkungsfaktoren*

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \tan\alpha, \qquad \frac{\partial g}{\partial \alpha} = a\left(1+\tan^2\alpha\right)$$

b) Aus

$$\frac{\partial g}{\partial a} = \tan\alpha, \qquad \frac{\partial g}{\partial \alpha} = h\left(\tan\alpha + \frac{1}{\tan\alpha}\right)$$

$\leadsto$ ‘$\tan\alpha$ nicht zu groß und nicht zu klein’, gut ist etwa $\alpha \approx 45°$.

$\square$

Zwei Kometen K_1, K_2 bewegen sich entlang folgender Bahnen in der (x,y)-Ebene:

$$K_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}, \quad K_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2\,t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Entscheiden Sie, ob die Kometen zu irgend einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ kollidieren. Falls ja, geben Sie den Zeitpunkt $t = t_{koll}$ der Kollision an. Falls nein, geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt $t = t_{min}$ die Kometen minimalen Abstand zueinander haben, und geben Sie den minimalen Abstand an. Gibt es mehrere Minima?

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Funktion $f(t)$.

b) Untersuchen Sie, ob die unter **a)** betrachtete Funktion $f(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvex bzw. strikt konvex ist.

c) Berechnen Sie alle Schnittpunkte der beiden Kometenbahnen.

- Was ist der Unterschied zu Frage **a)**?
- Auf welche Schwierigkeit stoßen Sie hier? Wie gehen Sie damit um?

---

a) Betrachte $f(t) :=$ Abstandsquadrat:

$$\begin{aligned} f(t) &= \big(x_1(t) - x_2(t)\big)^2 + \big(y_1(t) - y_2(t)\big)^2 \\ &= 2\,t^4 - 6\,t^3 + 7\,t^2 - 4\,t + 1 \ \geq \ 0 \end{aligned}$$

- Man errät eventuell die Nullstelle $t = 1$.
  (Keine weitere reelle Nullstelle.)
- Oder: Suche Minimalstelle von f, d.h., betrachte

  $$f'(t) = 8\,t^3 - 18\,t^2 + 14\,t - 4$$

  Man errät leicht die Nullstelle $t = 1$ und verifiziert $f(1) = 0$.
  (Keine weitere reelle Nullstelle.)

$\Rightarrow$ Kollision zum Zeitpunkt $t = 1$.

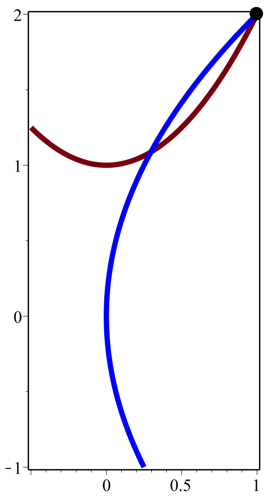
Alternative Lösung: Bestimme t so dass x-Koordinaten übereinstimmen, d.h.

$$t = t^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \ \text{ oder } \ t = 1$$

Jedoch: y-Koordinaten stimmen nur überein für $t = 1$, nicht für $t = 0$:

$$1 + t^2 = 2\,t \quad \checkmark \ \text{für } t = 1, \quad \not\checkmark \ \text{für } t = 0. \qquad \longrightarrow$$

[Animation]



b) Strikte Konvexität folgt aus

$$f''(t) \;=\; 24\,t^2 - 36\,t + 14 \;>\; 0$$

($f''(0) > 0$, keine reelle Nullstelle).

c) Schnittpunkte der durchlaufenen Bahnkurven:

Bestimme Parameterwerte (Zeitpunkte) t_1, t_2 mit $K_1(t_1) = K_2(t_2)$, d.h.

$$x_1(t_1) = x_2(t_2), \quad y_1(t_1) = y_2(t_2),$$

wobei $t_1 = t_2$ *nicht* gefordert wird.

$\rightsquigarrow$ Zwei Gleichungen für t_1, t_2:

$$t_1 \;=\; t_2^2, \quad 1 + t_1^2 \;=\; 2\,t_2$$

Elimination von t_1 $\rightsquigarrow$

$$t_2^4 - 2\,t_2 + 1 \;=\; 0$$

- Wir kennen bereits die Lösung $t_2 = t_1 = 1$.
- Suche nach weiteren Lösungen:

  Polynomdivision durch $(t_2 - 1)$ $\rightsquigarrow$ reduzierte Gleichung

  $$\varphi(t_2) \;:=\; t_2^3 + t_2^2 + t_2 \;=\; 1 \qquad \text{(kubische Gleichung)}$$

- Es gilt $\varphi(0) = 0 < 1$, $\varphi(1) = 3 > 1$ $\Rightarrow$ $\exists$ Nullstelle $t_2 \in (0,1)$.
- Numerischer Wert: $t_2 \approx 0.544$.
- Weiters: $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$

  $\Rightarrow$ φ strikt monoton $\uparrow$, keine weitere Nullstelle t_2. $\square$

a) Auf einem unbekannten Planeten wirft ein Astronaut einen Stein mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s senkrecht nach oben. Nach 10 Sekunden fällt der Stein zu Boden.

- Wie groß ist – in $\mathrm{m/s^2}$ – die Beschleunigung auf Grund der Gravitation (also das Analogon zur Erdbeschleunigung) auf diesem Planeten?
- Wie hoch fliegt der Stein?

Hinweis: Sie benötigen ein (sehr einfaches) Integral.

b) Diskutieren Sie die Frage, ob es – bei hinreichend großer Abwurfgeschwindigkeit – möglich ist, dass sich der Stein vom Planeten wegbewegt und in den Weiten des Alls verschwindet.

---

a) Sei

- g $[\mathrm{m/s^2}]$ die gesuchte Planetenbeschleunigung,
- $h(t)$ die Höhe des Steines als Funktion der Zeit t.

Dann gilt

(i) $h(0) = 0$ (Ausführung des Wurfes zum Zeitpunkt $t = 0$)

(ii) $h(10) = 0$ (nach 10 Sekunden Fall zu Boden)

(iii) $h'(0) = 20$ $[\mathrm{m/s}]$ (Anfangsgeschwindigkeit)

(iv) $h''(t) = -g = \text{const.}$ für $t > 0$.

$\rightsquigarrow$

- (iv) $\Rightarrow$ $h'(t) = c - g\,t$ mit $c \in \mathbb{R}$
- (iii) $\Rightarrow$ $h'(0) = c - g \cdot 0 = c = 20$

  $\Rightarrow$ $h'(t) = 20 - g\,t$

  Integrieren $\Rightarrow$ $h(t) = 20\,t - \dfrac{g}{2}t^2 + C$ (Integrationskonstante C)
- (i) $\Rightarrow$ $h(0) = C = 0$
- (ii) $\Rightarrow$ $h(10) = 20 \cdot 10 - \dfrac{g}{2} \cdot 10^2 = 0$

  $\Rightarrow$ $g = 4\ \mathrm{m/s^2}$, und $h(t) = 20\,t - 2\,t^2$.

Weiters: Mit $h'(t) = 20 - 4\,t$, $h'(5) = 0$ dreht der Stein nach 5 s um.

Für $t = 5$ ergibt sich die maximale Höhe $h(5) = 50\ \mathrm{m}$.

b) [UE:] Stichworte ‘Gravitationsfeld inhomogen’; ‘Fluchtgeschwindigkeit’ □