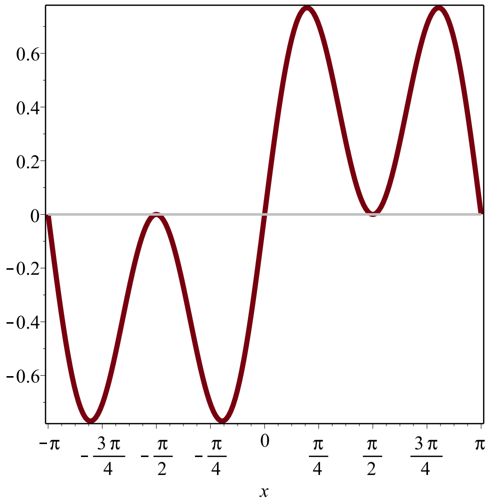
Führen Sie für die in UE 5, Aufgabe 9 a) betrachtete Funktion eine komplette Kurvendiskussion durch.

$$f(x) = \cos x \sin(2x) = 2 \sin x \cos^2 x = 2\left(\sin x - \sin^3 x\right)$$
$$f'(x) = 2\left(\cos x - 3 \sin^2 x \cos x\right) = 2 \cos x \left(1 - 3 \sin^2 x\right)$$



- f ist 2π - periodisch, ungerade
- $f(x) \leq 0$ für $x \in [-\pi, 0]$,
  $f(x) \geq 0$ für $x \in [0, \pi]$
- Nullstellen von f in $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \ \text{ oder } \ \cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0, \ \pm\tfrac{\pi}{2}, \ \pm\pi$$

- f' ist 2π - periodisch, gerade
- Nullstellen von f' in $[-\pi, \pi]$:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \ \text{ oder } \ \sin x = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 0.577$$
$$\text{also} \quad x = \pm\tfrac{\pi}{2}, \ \pm \arcsin(\tfrac{\sqrt{3}}{3}) \approx \pm 0.615$$

mit $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, und für $\xi := \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{3})$ gilt

$$f(\xi) = 2\left(\sin \xi - \sin^3 \xi\right) = 2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{3} - (\tfrac{\sqrt{3}}{3})^3\right) = \tfrac{4}{9}\sqrt{3} \approx 0.77$$

- $x = +\frac{\pi}{2}$: lokales Minimum; $\quad x = -\frac{\pi}{2}$: lokales Maximum
- $x = +\xi$: globales Maximum; $\quad x = -\xi$: globales Minimum

$\longrightarrow$

Weitere Symmetrieeigenschaft:

- Für $x \in [0, \pi]$ gilt

$$f(\pi - x) = f(x) \quad \text{wegen} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

- Analog für $x \in [-\pi, 0]$

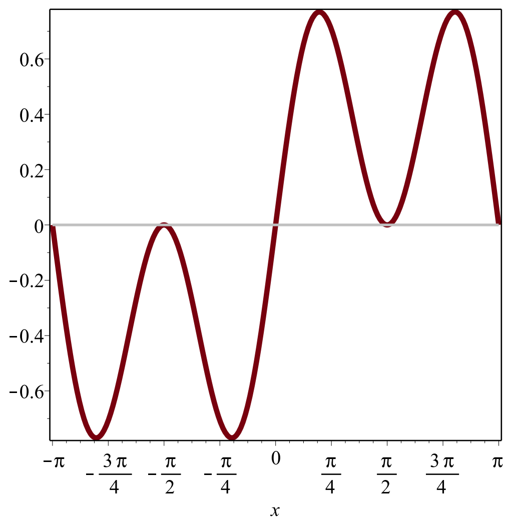
- *Daher auch* (mit $\xi = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{3})$) :

  $x = +(\pi - \xi)$: globales Maximum; $\quad x = -(\pi - \xi)$: globales Minimum

  Anmerkung:

  Auch für $x = \pm(\pi - \xi) \in [-\pi, \pi]$ gilt $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ [Skizze]

  (= Bedingung für Extremalstelle). Zuvor hatten wir nur die Extremstellen $\pm\xi$ gefunden, weil wir nur den Hauptzweig von arcsin ausgewertet haben. Dieser liefert hier nicht die volle Information.



□

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(x) \;=\; \frac{\left(\ln x\right)^2}{x}}$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze. Charakterisieren Sie inbesondere das asymptotische Verhalten für $x \to 0$ und $x \to \infty$.

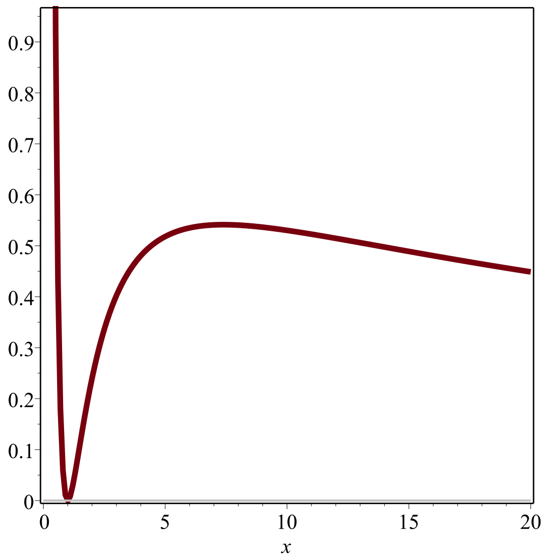
b) Gegeben sei die Funktion $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(x) \;=\; \arctan(x^3)}$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

---

a) $f(x) \;=\; \dfrac{\left(\ln x\right)^2}{x}$



Spezielle Eigenschaften, Asymptotik, etc. :

- f auf $(0,\infty)$ beliebig oft differenzierbar
- $f(x) \geq 0$ für alle $x > 0$
- Nullstelle: $x = 1$ (offenbar doppelt)
- $f(x) \to +\infty$ für $x \to 0+$
- $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$
- Monotonie- und Konvexitätseigenschaften ergeben sich aus der Lage der Extrema und Wendepunkte $\to$

$\longrightarrow$

a) (Fortsetzung):

Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{2\,\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x\,(2 - \ln x)}{x^2}$$

$$f''(x) = \ldots = \frac{2\left((\ln x)^2 - 3\ln x + 1\right)}{x^3}$$

- *Extremalstellen:*

$$f'(x) = 0 \quad \text{für} \quad x = 1 \text{ (doppelte Nullstelle)}, \quad \text{und} \quad x = e^2 \approx 7.39$$

mit

$$f''(1) = 2 > 0, \qquad f''(e^2) = -\frac{2}{e^6} < 0$$

$\Rightarrow$

$$x = 1: \quad \text{globales Minimum}, \; f(1) = 0,$$

$$x = e^2: \quad \text{lokales Maximum}, \; f(e^2) = \frac{4}{e^2} \approx 0.54$$

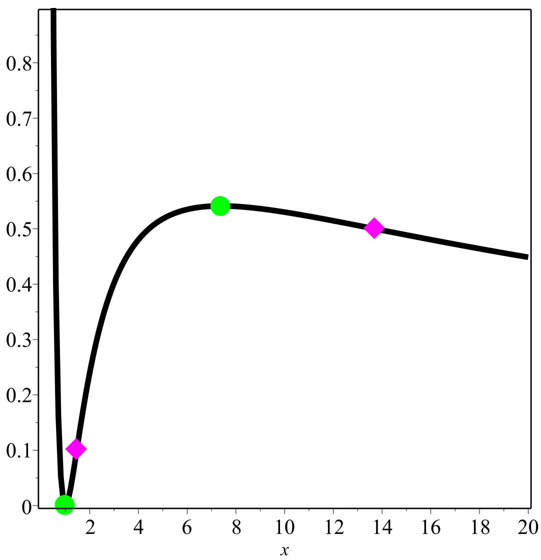
- *Wendepunkte:*

$$f''(x) = 0 \quad \text{für} \quad (\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0$$

Löse quadratische Gleichung in $y = \ln x \quad \Rightarrow$

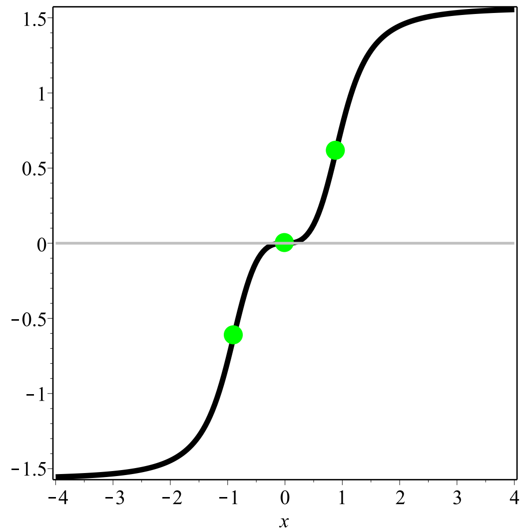
$$\text{Wendepunkte bei} \quad x = \exp\left(\frac{3}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \approx 1.47,\; 13.71$$

(Dort ist $f'''(x) \neq 0$. ✓)



$\longrightarrow$

b) $f(x) \;=\; \arctan(x^3)$



Spezielle Eigenschaften, Asymptotik, etc. :

- f auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar
- f ist ungerade, beschränkt
- f strikt monoton $\uparrow$ (weil arctan, x^3 strikt monoton $\uparrow$)
- $\operatorname{sign}(f(x)) \;=\; \operatorname{sign}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- Nullstelle: $x = 0$
- $f(x) \to \pm\frac{\pi}{2}$ für $x \to \pm\infty$ (Asymptoten $\pm\frac{\pi}{2}$)
- Monotonie- und Konvexitätseigenschaften ergeben sich aus der Lage der Extrema und Wendepunkte $\quad\to$

Ableitungen:

$$f'(x) \;=\; \frac{3\,x^2}{x^6+1}\,, \qquad f''(x) \;=\; \frac{6\,x\,(1-2\,x^6)}{(x^6+1)^2}$$

- *Extremalstellen:*

$$f'(x) = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, \quad \text{mit} \quad f''(0) = 0 \quad \text{(dreifache Nullstelle)}$$

- *Wendepunkte:*

$$f''(x) = 0 \quad \text{auch für} \quad x = \pm 2^{-1/6} \;\approx\; \pm\, 0.89$$

An allen diesen Stellen gilt $f'''(x) \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$x = 0\;: \quad \text{Sattelpunkt}, \qquad x = \pm 2^{-1/6}\;: \quad \text{Wendepunkte}$$

$\square$

a) Seien $a, b \geq 0$ und $p \geq 1$ reelle Zahlen. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\boxed{(a+b)^p \;\leq\; 2^{p-1}\,(a^p+b^p)}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion $f(x) = x^p$ konvex ist für $x \geq 0$, und nützen Sie dies aus.

b) $(*)$ Für den Spezialfall $p \in \mathbb{N}$ kann man die Ungleichung auch mittels vollständiger Induktion beweisen. (Freiwillige Wiederholung zum Thema vollständige Induktion.)

---

a) $f(x) = x^p$ ist konvex für $x \geq 0$:

$$f''(x) \;=\; p\,(p-1)\,x^{p-2} \;\geq\; 0 \quad \text{für} \quad x \geq 0,\; p \geq 1 \qquad \checkmark\,^a$$

$\Rightarrow$ (gemäß Definition der Konvexität, mit $\lambda = \frac{1}{2}$):

$$f(\tfrac{1}{2}(a+b)) \;\leq\; \tfrac{1}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2^p}\,(a+b)^p \;\leq\; \frac{1}{2}\,(a^p+b^p)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)^p \;\leq\; 2^{p-1}(a^p+b^p) \qquad \checkmark$$

b) Induktionsbeweis für $p \in \mathbb{N}$:

- $p = 1$: $\;a+b \;=\; a+b \quad \checkmark$
- $p \;\mapsto\; p+1$:

$$(a+b)^{p+1} \;=\; (a+b)(a+b)^p \;\overset{\text{IND}}{\leq}\; (a+b)\,2^{p-1}(a^p+b^p)$$

$$=\; 2^{p-1}\big(a^{p+1} + a\,b^p + b\,a^p + b^{p+1}\big)$$

mit [Trick]

$$a\,b^p + b\,a^p \;=\; a^{p+1} + b^{p+1} + \underbrace{(a-b)(b^p-a^p)}_{\leq\,0}$$

$$\leq\; a^{p+1} + b^{p+1}$$

$\Longrightarrow$ Behauptung für $p+1$. $\quad\checkmark$

$\square$

---

[a] Sonderfall $a = 0$ oder $b = 0$ trivial. Für $a, b > 0$ verwenden wir $0 < f''(x) < \infty$ für $x > 0$.

Wir betrachten die von einem Parameter $p > 0$ abhängige Familie von Funktionen

$$\boxed{f_p(x) \;=\; x^p\, e^{-x}} \qquad \text{für } x \geq 0.$$

a) Klären Sie, ob diese Funktionenfamilie *gleichmäßig (nach oben) beschränkt* ist, d.h. ob eine Konstante C existiert mit

$$\sup_{p\geq 0}\,\sup_{x\geq 0} f_p(x) \;\leq\; C\,.$$

b) Falls gleichmäßige Beschränktheit gemäß **a)** vorliegt, bestimmen Sie die Konstante C.

Andernfalls bestimmen Sie den Wert von

$$\inf_{p\geq 0}\,\sup_{x\geq 0} f_p(x)\,.$$

c) Zusatzfrage: *What about* $p = 0$? Was fällt Ihnen hier auf?

---

a) Für alle $p > 0$ gilt $f_p(0) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_p(x) = 0$, und

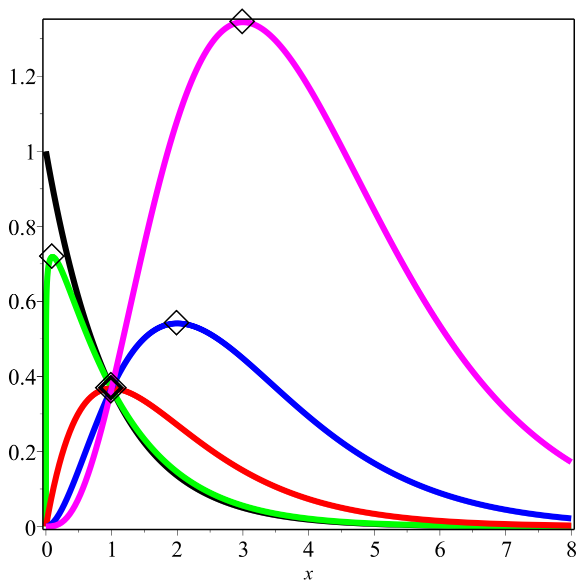
$$f_p'(x) \;=\; \big(p\,x^{p-1} - x^p\big)\, e^{-x} \;=\; (p - x)\, x^{p-1}\, e^{-x}$$

$\Rightarrow$ lokale = globale Maximalstelle an $x = p$, mit

$$f_p(p) \;=\; p^p\, e^{-p} \;=\; e^{p\ln p}\, e^{-p} \;=\; e^{p\,(\ln p - 1)} \;\to\; \infty \quad \text{für } \; p \to \infty$$

$\Rightarrow$ nicht gleichmäßig beschränkt.

Grafik: Verlauf von $f_p(x)$ für $p \;=\; 0,\ 0.1,\ 1,\ 2,\ 3$



$\longrightarrow$

b) Betrachte die Funktion $m\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ (siehe Grafik),

$$m(p) \;:=\; \max_{x\geq 0} f_p(x) \;=\; f_p(p) \;=\; p^p\, e^{-p} \;=\; e^{p\,(\ln p - 1)}$$

mit [de l'Hospital an $p=0$ für $p\,\ln p = \ln p/(1/p)$]

$$\lim_{p\to 0+} m(p) = 1, \qquad \lim_{p\to\infty} m(p) = \infty$$

$$m(p) \;=\; e^{p\,(\ln p-1)} > 0$$

$$m'(p) \;=\; m(p)\left(\ln p - 1 + p\cdot \tfrac{1}{p}\right) \;=\; m(p)\,\ln p$$

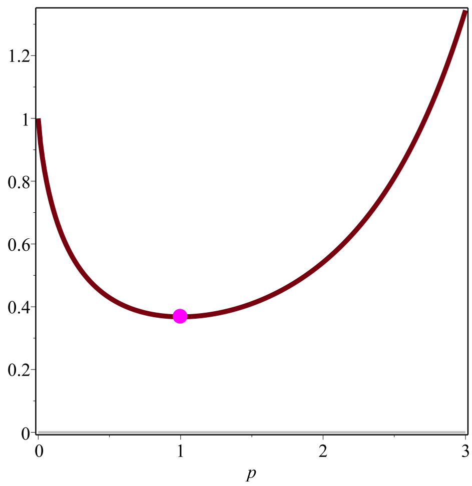
$\Rightarrow$

$$m'(p) = 0 \;\text{ für } p = 1, \quad \text{mit } \; m(1) = 1/e$$

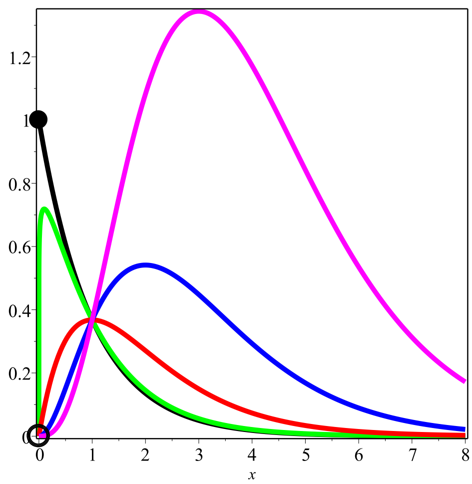
[siehe Grafik ↑] $p = 1$ muss lokale <u>Minimal</u>stelle von $m(p)$ sein, ist gleichzeitig <u>globale</u> Minimalstelle.

$\Rightarrow$

$$\inf_{p\geq 0}\, \sup_{x\geq 0} f_p(x) \;=\; \frac{1}{e}\,.$$



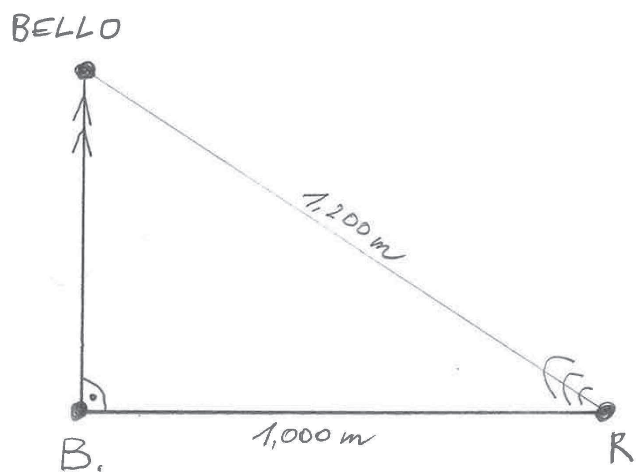
c) $f_p(0) = 0$ für $p > 0$, jedoch $f_0(0) = 1$.



□

Herr B. geht mit seinem Mischling Bello auf einer geradlinig verlaufenden Straße spazieren. Bello erblickt etwas auf der Wiese nebenan und läuft geradlinig in einem Winkel senkrecht zur Straße davon. 1000 m von Herrn B.'s Standort entfernt befindet sich an der Straße ein Radarmessgerät. Als Bello 1200 m von diesem entfernt ist, blitzt ihn das Radar, und die Messung ergibt, dass sich Bello in diesem Moment mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s von dem Radargerät wegbewegt (d.h. in Richtung vom Radar weg gemessen).

Hat Bello in diesem Moment die gesetzlich zulässige Hundehöchstgeschwindigkeit von 20 km/h *überschritten?*



[Skizze:] Zum Zeitpunkt des Blitzens ist

- $x = 1000$ ... Abstand B. – Radar (horizontal, konstant)
- $r = 1200$ ... Abstand Bello – Radar (diagonal)
- y ... Abstand Bello – B. (vertikal)

  $\Rightarrow$ (nach Pythagoras):

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \approx 663.32$$

Der Abstand Bello – B. ist eine Funktion der Hundelaufzeit t, $y = y(t)$, und somit auch r: $r = r(t) = \sqrt{x^2 + y(t)^2}$. Zum Zeitpunkt des Blitzens ist $r(t) = 1200$, und laut Angabe

$$3 = r'(t) = \frac{d}{dt}\sqrt{x^2 + y(t)^2} = \frac{y(t)\,y'(t)}{r(t)} \approx \frac{663.32\,y'(t)}{1200}$$

$\Rightarrow$

$$y'(t) \approx \frac{3 \cdot 1200}{663.32} \approx 5.43\,\mathrm{m/s} \approx 19.55\,\mathrm{km/h}\,.$$ Kein Strafmandat. $\square$

Konvexe Minimierung:

a) Gegeben sei eine (mindestens) zweimal differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, und es gelte $f(a) = f(b)$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Beweisen Sie die (anschaulich naheliegende) Tatsache:

f besitzt in (a,b) eine eindeutige Minimalstelle.

b) Bleibt die Ausage aus **a)** auch dann richtig, wenn $f(a) = f(b)$ nicht vorausgesetzt wird? Falls nein - was muss an den Randpunkten gelten, damit die Aussage richtig bleibt?

---

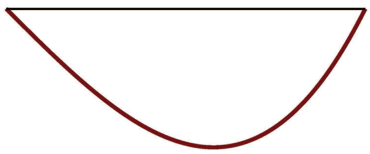
a)
- $f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists\, \xi \in (a,b) \;:\; f'(\xi) = 0$ (MWS; Satz von Rolle)
- $f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)$ strikt monoton $\uparrow$, insbesondere injektiv

$\Rightarrow \quad \xi$ ist eindeutig, und es gilt

$$f'(x) \begin{cases} < 0, & x \in [a,\xi) \\ > 0, & x \in (\xi, b] \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$x = \xi$ ist eindeutige Minimalstelle, mit $f(\xi) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)\,.$ ✓

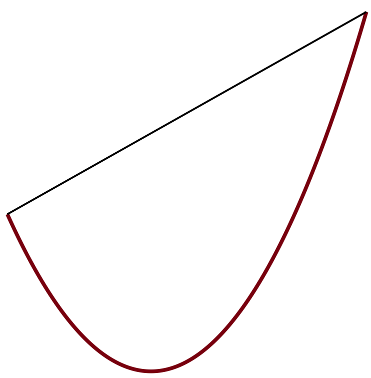


b) Nein – Gegenbeispiele leicht zu sehen.

Forderung: $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$

$\Rightarrow \quad \exists\, \xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$ (Zwischenwertsatz für f')

Dann Beweis wie unter **a)**.



Grafik: $f(a) < f(b)$ (analog für $f(a) > f(b)$

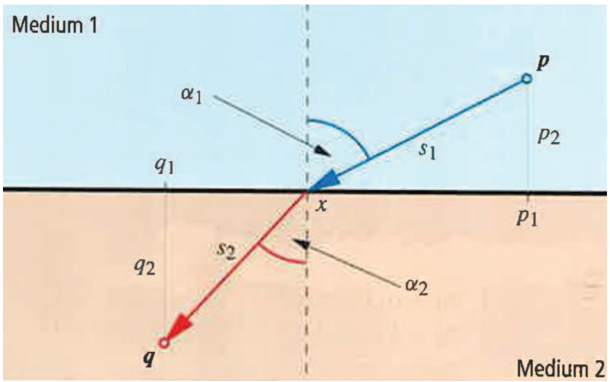
a) ist ein Spezialfall von **b)**. $\square$

(∗) Das *Fermat'sche Prinzip* der Optik besagt, dass Licht stets den Weg kürzester Zeitdauer einschlägt. Wir betrachten den Weg des Lichts zwischen zwei Punkten p und q in zwei Medien (z.B. Luft und Vodka) mit unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten c_1 und c_2. Innerhalb des jeweiligen Mediums bewegt sich das Licht entlang eines geradlinigen Strahls.

Geben Sie eine Funktion an, die die Dauer von p nach q als Funktion $T(x)$ der Stelle x laut Grafik angibt, und folgern Sie aus der Minimalitätsbedingung $T'(x) = 0$ für den Verlauf des Lichtstrahles das *Snellius'sche Brechungsgesetz*

$$\boxed{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

α_1, α_2 laut Grafik. Medium 1 oben, Medium 2 unten; x ist die waagrechte Koordinate entlang der geradlinigen Grenze zwischen den beiden Medien.



Kartesisches Koordinatensystem (x, y): Die x-Achse begrenzt die beiden Medien. Gesucht ist die Stelle x, an der der Lichtstrahl diese Grenze passiert.

Mit

$$T_1 := \text{Laufzeit in Medium 1 (oben)}, \quad T_2 := \text{Laufzeit in Medium 2 (unten)}$$

gilt für die Gesamtlaufzeit $T = T_1 + T_2$ mit s_1, s_2 laut Grafik:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2}$$

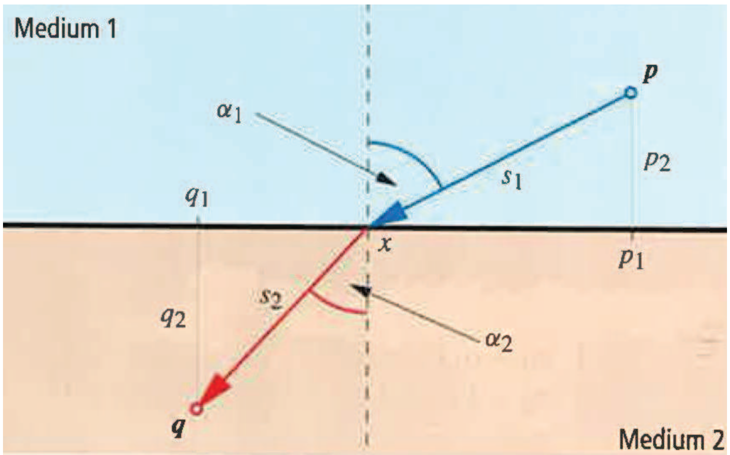
Kartesische Koordinaten der Endpunkte p und q:

$$p = (p_1, p_2), \qquad q = (q_1, q_2)$$

$\rightsquigarrow$ mit $x = x$ - Koordinate des Durchstoßpunktes gilt (Pythagoras)

$$s_1 = \sqrt{(p_1 - x)^2 + p_2^2}\,, \quad s_2 = \sqrt{(x - q_1)^2 + q_2^2}$$

$\longrightarrow$



$\rightsquigarrow$ Laufzeit $T = T(x)$ als Funktion der gesuchten Koordinate x :

$$T(x) = \frac{1}{c_1}\sqrt{(p_1 - x)^2 + p_2^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{(x - q_1)^2 + q_2^2}$$

Minimalitätsbedingung erfordert $T'(x) = 0$.

$$T'(x) = -\frac{p_1 - x}{c_1\sqrt{(p_1 - x)^2 + p_2^2}} + \frac{x - q_1}{c_2\sqrt{(x - q_1)^2 + q_2^2}}$$

$$= -\frac{p_1 - x}{c_1\, s_1} + \frac{x - q_1}{c_2\, s_2} = -\frac{\sin\alpha_1}{c_1} + \frac{\sin\alpha_2}{c_2} \stackrel{!}{=} 0$$

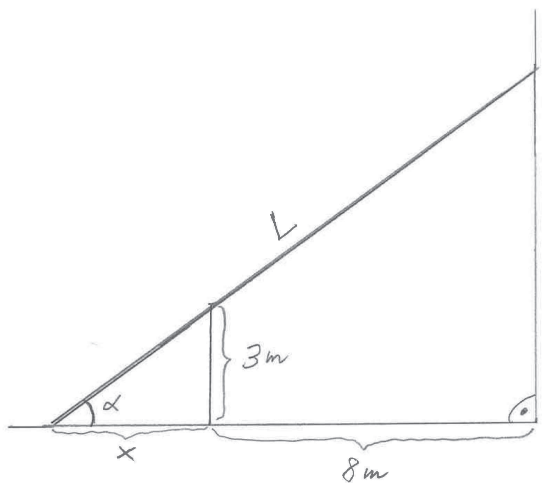
$\Rightarrow$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} \qquad \checkmark$$

Minimaleigenschaft ist klar, weil $T(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$.

$\square$

Eine 3 m hohe Mauer steht im Abstand von 8 m vor einem Gebäude. Ermitteln Sie die Länge des kürzesten geraden Balkens, der, angelegt am Boden außerhalb der Mauer, die Front des Gebäudes erreicht.



Gemäß Skizze zwei ähnliche Dreiecke: $\rightsquigarrow$

$$L\,\cos\alpha \;=\; x+8\,, \quad \text{wobei} \quad \tan\alpha \;=\; \frac{3}{x}$$

$\Rightarrow$ L darstellbar (z.B.) als Funktion von α oder von x (x günstiger).

$\rightsquigarrow$ Mit [a] $\cos(\arctan t) = 1/\sqrt{1+t^2}$:

$$L(x) \;=\; \frac{x+8}{\cos(\arctan(3/x))} \;=\; (x+8)\,\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}$$

Ableitung:

$$L'(x) \;=\; \sqrt{1+\frac{9}{x^2}} \;-\; (x+8)\,\frac{9}{x^3\,\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}\left(1+\frac{9}{x^2}-\frac{9\,(x+8)}{x^3}\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}\left(1-\frac{72}{x^3}\right)$$

$\Rightarrow$ $L'(x) = 0$ für $x = 72^{1/3} = 2\cdot 3^{2/3} \approx 4.16$ $\rightsquigarrow$

$$x_{min} \;\approx\; 4.16\,\text{m}, \qquad \alpha_{min} \;=\; \arctan(3/x_{min}) \;\approx\; 0.625 \;\sim\; 35.8^\circ$$

und schließlich

$$L_{min} \;=\; L(x_{min}) \;\approx\; 14.99\,\text{m}\,.$$

Minimaleigenschaft ist klar, weil $L(x) \to \infty$ für $x \to 0+$ und für $x \to \infty$. $\square$

---

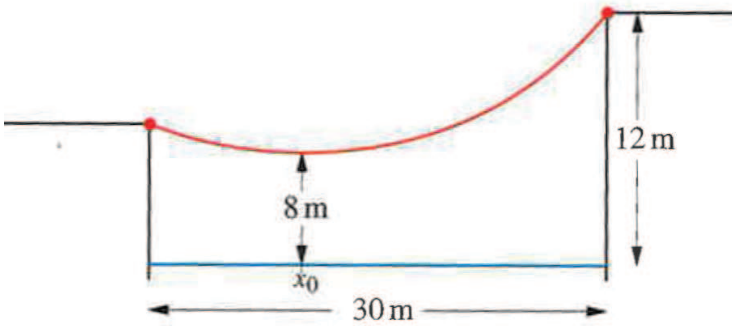
[a] Folgt aus $\tan(\arctan t) = \sqrt{1-\cos^2(\arctan t)}\,/\,\cos(\arctan t) = t$

(∗∗) Über eine 30 m breite Bucht soll eine Hängebrücke gebaut werden. Dabei wird die Form der Brücke durch eine sogenannte *Kettenlinie* beschrieben, d.h. durch eine Funktion der Gestalt

$$\boxed{f(x) \;=\; h + a \cdot \Big(\cosh\Big(\frac{x - x_0}{a}\Big) - 1\Big)}$$

beschrieben. Dabei gilt (alle Längenangaben in m):

- x ist die horizontale Ortskoordinate; die Brücke erstreckt sich von $x = 0$ bis $x = 30$.
- Der linke und rechte Aufhängepunkt (bei $x = 0$ bzw. $x = 30$) befindet sich 10 m bzw. 12 m über dem Wasserspiegel.
- Die erwünschte Durchfahrtshöhe ist $h = 8$ m, d.h. Schiffe mit einer Höhe von maximal 8 m sollen unter der Brücke passieren können.



Bestimmen Sie den Parameter a entsprechend der obigen Spezifikation, ebenso den Parameter x_0 (was bedeutet dieser?).

Hinweis: Schreiben Sie zwei Gleichungen für die gesuchten Parameter a und x_0 an, die sich aus der Angabe ergeben. Dieses nichtlineare Gleichungssystem kann man nicht exakt analytisch lösen. Man greift daher zur numerischen Lösung auf das Newton-Verfahren zurück. Wie das Newton-Verfahren in zwei oder mehreren Variablen funktioniert, lernt man in 'Analysis II'. Wir gehen hier anders vor: Führen Sie anstelle der Variablen x_0 die Variable $y := x_0/a$ ein und schreiben Sie eine der beiden Gleichungen als Gleichung in den Variablen a und y an, $\varphi(a, y) = 0$. Diese können Sie formelmäßig exakt nach a auflösen und erhalten somit eine Funktion $a = a(y)$. Einsetzen von $a = a(y)$ in die zweite Gleichung liefert eine Gleichung in der Variable y, die Sie mit dem Newton-Verfahren numerisch lösen können.

Man benötigt nun noch einen brauchbare Startnäherung, die 'optisch' schwer zu schätzen ist. Gehen Sie so vor: Ersetzen Sie die Funktion $g(t) = \cosh t$ durch die Parabel $\tilde{g}(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$; für nicht zu große t haben diese beiden Funktionen einen ähnlichen Verlauf. Das so entstehende Näherungsproblem können Sie mit derselben Substitution wie oben angegeben exakt lösen. Verwenden Sie diese Lösung als Startnäherung für die Newton-Iteration am Rechner.

Dies ist ein Problem der Parameteridentifikation:

Die Parameter a und x_0 zu identifizieren aufgrund der gestellten Forderungen: Für die (laut Ansatz offensichtliche) Minimalstelle x_0 von

$$f(x) \;=\; 8 + a \cdot \Big(g\Big(\frac{x - x_0}{a}\Big) - 1\Big), \qquad \text{mit (Abkürzung:)} \;\; g := \cosh,$$

soll gelten $x_0 \in (0, 30)$, *mit* $f(x_0) = 8$, bei gegebenen Aufhängepunkten: $\longrightarrow$

Vorgegebene Positionen der Aufhängepunkte ergeben zwei Gleichungen für a und x_0 :

$$10 \stackrel{!}{=} f(0) = 8 + a \cdot \Big(g\Big(\frac{0 - x_0}{a}\Big) - 1 \Big) \tag{i}$$

$$12 \stackrel{!}{=} f(30) = 8 + a \cdot \Big(g\Big(\frac{30 - x_0}{a}\Big) - 1 \Big) \tag{ii}$$

- *Reduktion auf eine einzige Gleichung:*
  - In der ersten Gleichung (i) setzen wir $y := x_0/a$ und erhalten so eine Beziehung zwischen a und y, die nach a auflösbar ist (beachte $g(y) = g(-y)$) :

$$2 = a\,\big(g(y) - 1\big) \qquad \Rightarrow \qquad a = a(y) = \frac{2}{g(y) - 1} \tag{iii}$$

  - Einsetzen von $y = x_0/a$ und $a = a(y)$ in die zweite Gleichung (ii) ergibt eine Gleichung für y :

$$4 = a(y) \cdot \Big(g\Big(\frac{30}{a(y)} - y\Big) - 1 \Big) \tag{iv}$$

- *Bestimmung eines Startwertes: Ersetze* $g(t) = \cosh t$ *durch* $\tilde{g}(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$
  - Anstelle von (iii) erhalten wir

$$2 = a\Big(1 + \frac{y^2}{2} - 1\Big) \qquad \Rightarrow \qquad a = a(y) = \frac{4}{y^2} \tag{v}$$

  - Einsetzen von $y = x_0/a$ und $a = a(y)$ in die zweite Gleichung (ii) (mit $\tilde{g}$ anstelle von g) ergibt eine Gleichung für y :

$$\begin{aligned} 4 &= a(y) \cdot \Big(\tilde{g}\Big(\frac{30}{a(y)} - y\Big) - 1 \Big) \\ \Leftrightarrow \quad 4 &= \frac{4}{y^2} \cdot \Big(\tilde{g}\Big(\frac{30\,y^2}{4} - y\Big) - 1 \Big) \\ \Leftrightarrow \quad 4 &= \frac{4}{y^2} \cdot \Big(1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{30\,y^2}{4} - y\Big)^2 - 1 \Big) \\ \Leftrightarrow \quad \ldots \quad & y^2\Big(\frac{225}{8}\,y^2 - \frac{15}{2}\,y - \frac{1}{2}\Big) = 0 \end{aligned} \tag{vi}$$

    mit einer positiven Lösung:

$$y = \frac{2}{15}\,(1 + \sqrt{2}) \approx 0.322$$

    … ergibt Startwert für die Newton-Iteration zur Lösung von (iv). $\longrightarrow$

- *Newton-Iteration für* (iv): Zu lösen ist die Gleichung

$$F(y) \;:=\; a(y)\cdot\Big(g\Big(\frac{30}{a(y)}-y\Big)-1\Big)-4 \;=\; 0$$

mit $g = \cosh$, $a(y) = \dfrac{2}{g(y)-1}$.

Durchführung in Computeralgebra (Maple):

```
g := cosh:
a := y -> 2/(g(y)-1):
F := y -> a(y)*(g(30/a(y)-y)-1)-4:
y[0] := 0.322: # Startwert
for i from 1 to 3 do # Newton in double-Arithmetik:
    y[i] := evalf(y[i-1]-F(y[i-1])/D(F)(y[i-1]))
end:
```

Dies ergibt Folge von Näherungswerten:

```
y[0] = 0.322
y[1] = 0.3184555865
y[2] = 0.3184158752
y[3] = 0.3184158703
```

mit Residuum $F(y_3) \approx 10^{-15}$.

- $\Rightarrow$ *Numerische Lösung:*

$$y \;=\; 0.3184158703\,,$$

$$\Rightarrow\qquad a \;=\; a(y) \;=\; \frac{2}{\cosh y - 1} \;=\; 39.12049105\,,$$

$$\Rightarrow\qquad x_0 \;=\; \frac{y}{a} \;=\; 12.45658520\,.$$

Anmerkung: Der Startwert war bereits ziemlich genau.

$\square$

Für bestimmte Integrale, die sich nicht exakt mittels Stammfunktionen berechnen lassen, verwendet man numerische Näherungsformeln. Wir betrachten die einfachste derartige Formel über einem Integrationsintervall $[a,b]$. Der Integrand $f(x)$ wird als stetig differenzierbar vorausgesetzt.

a) Geben Sie für den Fehler $R(f;a,b) - I(f;a,b)$ der *Rechtecksformel*

$$\boxed{R(f;a,b) \;:=\; (b-a)\,f(a) \;\approx\; I(f;a,b) \;:=\; \int_a^b f(x)\,dx}$$

eine formelmäßige Darstellung an, die von $f'(\xi)$ (für ein $\xi \in [a,b]$) abhängt. In welcher Weise hängt der Fehler von der Intervalllänge $b-a$ ab?

Für welche Integranden liefert die Rechteckformel das exakte Ergebnis?

b) Wir denken uns das Intervall $[a,b]$ in n gleich lange Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n$, unterteilt, mit den 'Gitterpunkten'

$$x_0 = a,\; x_1 = a+h,\; \ldots,\; x_{n-1} = b-h,\; x_n = b, \quad (h = 1/n),$$

wenden auf jedem der Teilintervalle die Rechtecksformel $R(f;x_{i-1},x_i)$ an und summieren auf. Das Ergebnis, die *summierte Rechtecksformel*, eine Riemann-Summe über der gewählten Unterteilung. Wir bezeichnen sie mit $R_{summe}(f;a,b)$.

Geben Sie für den Fehler der summierten Rechtecksformel eine Abschätzung der Form

$$\boxed{\big|R_{summe}(f;a,b) - I(f;a,b)\big| \;\le\; C\,h^p \max_{\xi\,\in\,[a,b]} |f'(\xi)|}$$

an. Wie lautet der Wert für die 'Konvergenzordnung' p, und welche Konstante C tritt in der Abschätzung auf?

---

a) 1. MWS der Integralrechnung $\;\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; (b-a)\,f(\xi) \quad \text{für ein} \quad \xi \in [a,b]$$

$\Rightarrow$

$$R(f;a,b) - I(f;a,b) \;=\; (b-a)\,\big(f(a) - f(\xi)\big), \quad \xi \in [a,b]$$

und weiter (mittels 1. MWS der Differentialrechnung für f):

$$R(f;a,b) - I(f;a,b) \;=\; (b-a)(a-\xi)\,f'(\eta), \quad \eta \in (a,\xi) \subseteq [a,b]$$

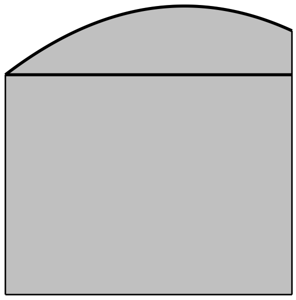
$\longrightarrow$

a) (Fortsetzung:)

$\Rightarrow$ Fehlerabschätzung:

$$|R(f;a,b) - I(f;a,b)| \;\le\; (b-a)^2 \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Die Rechteckformel ist exakt nur für konstante Funktionen.



b) Gemäß **a)** gilt für alle Teilintervalle x_{i-1}, x_i :

$$\big|R(f;x_{i-1},x_i) - I(f;x_{i-1},x_i)\big| \;\le\; h^2 \max_{\xi \in [x_{i-1},x_i]} |f'(\xi)|$$

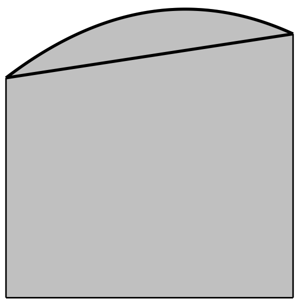
$\Rightarrow$ mit $h = 1/n$:

$$\begin{aligned}\big|R_{summe}(f;a,b) - I(f;a,b)\big| \;&=\; \Big|\sum_{i=1}^{n} R(f;x_{i-1},x_i) - I(f;x_{i-1},x_i)\Big| \\ &\le\; \sum_{i=1}^{n} \big|R(f;x_{i-1},x_i) - I(f;x_{i-1},x_i)\big| \\ &\le\; n\,h^2 \max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \;=\; h \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|\end{aligned}$$

Anmerkung: Es gibt bessere Näherungsverfahren, z.B. die [summierte] *Trapezformel*, basierend auf (siehe Abbildung, exakt für affine Funktionen),

$$T(f;a,b) \;:=\; \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) \;\approx\; I(f;a,b)$$

Die summierte Trapezformel $T_{summe}(f;a,b)$ hat die Konvergenzordnung $p = 2$ für mindestens zweimal stetig differenzierbare Integranden.



□