Analysis I für TPH, UE (103.088), WS 2014/15 **1. Übungsblatt (13.10.2014)**

Schriftliche Ausarbeitungen der Übungsaufgaben werden jeweils nach der Übungsstunde auf der Homepage der LVA veröffentlicht. Deren Studium (im nachhinein) ist aber weder ein vollwertiger Ersatz für die eigenständige Auseinandersetzung mit dem Stoff (im vorhinein) noch für den Besuch der Übungsstunde.

Es gibt drei Typen von Aufgaben:

- *'Normale' Aufgaben (ohne (∗)) bzw. Unterpunkte davon haben etwa den Charakter von möglichen Testaufgaben. (D.h., tatsächliche Testaufgaben können ähnlich sein; sie werden in Umfang und Schwierigkeitsgrad an die beim Test zur Verfügung stehende Arbeitszeit angepasst.)*
- *(∗) Aufgaben mit (∗) dienen der Vertiefung und können ggf. auch etwas aufwendiger sein. Auch wenn es sich um keine typischen Testaufgaben handelt, ist die Beschäftigung damit nützlich für das aktive Erarbeiten des Stoffes.*
- *(∗∗) Kommt selten vor. Nicht testrelevant, behandelt stoffliche Erweiterungen, mit ausreichenden Hinweisen für die Lösung. Für Mathe-Freaks.*

Die Verwendung des Computers ist oft sehr hilfreich, und wir nehmen gelegentlich darauf Bezug (nicht testrelevant). Dazu ist es nützlich, dass Sie eine Programmiersprache beherrschen; für den erfolgreichen Abschluss der Übung ist dies natürlich nicht erforderlich.

Bezüglich Tests aus den vergangenen Semestern (mit Lösungen, zum Selbststudium geeignet) sei auf die Homepage dieser Übung verwiesen.

---

1. a) Beweisen Sie die Identität (für $\ell \le n$)

$$\boxed{\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}}$$

indem Sie $\ell \in \mathbb{N}_0$ beliebig (aber fest) wählen und Induktion bezüglich n verwenden. Induktionsanfang ist hier $n = \ell$ (!)

b) [ähnlich zu einer Testaufgabe aus WS 2013/14]
Behauptung:

$$\boxed{\text{Für beliebige } m, n \in \mathbb{N} \text{ ist } (m+1)^n - 1 \text{ ohne Rest durch } m \text{ teilbar.}}$$

Beweisen Sie diese Behauptung

(i) mittels vollständiger Induktion,
(ii) mittels Zurückführung auf eine bekannte Summenformel.

2. [Prüfungsaufgabe, 2014]

a) Schreiben Sie den Ausdruck ($n \in \mathbb{N}$)

$$\boxed{(x_1 - y_1)\, x_2 \cdots x_n + y_1\, (x_2 - y_2)\, x_3 \cdots x_n + \cdots + y_1 \cdots y_{n-2}\, (x_{n-1} - y_{n-1})\, x_n + y_1 \cdots y_{n-1}\, (x_n - y_n)}$$

mit Hilfe des Summen- und des Produktsymbols ($\sum$, $\prod$) an.

b) Die offensichtliche Identität $x_1\,x_2 - y_1\,y_2 = (x_1 - y_1)\,x_2 + y_1(x_2 - y_2)$ verallgemeinert sich wie folgt ($n \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{\text{Für } X_n = x_1 \cdots x_n,\ Y_n = y_1 \cdots y_n \ \text{ gilt } \ X_n - Y_n \ = \ \text{Summe aus } \mathbf{a)}\,.}$$

Führen Sie zum Beweis dieser Formel den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ durch.

Hinweis: Betrachten Sie $X_{n+1} - Y_{n+1} = X_n\,x_{n+1} - Y_n\,y_{n+1}$. (Hier könnte man die Notation aus der Lösung von **a)** mit $\sum$, $\prod$ verwenden, das ist aber eher nicht zu empfehlen. Bleiben Sie bei der '$\cdots$ - Notation'.)

3. [Prüfungsaufgaben, 2012]

Zwei Varianten des Induktionsprinzips. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

a) *Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen n, und es gelte $A(1)$. Falls man zeigen kann*

$$\forall\, n \geq 2 : \quad \exists\, m < n : \quad A(m) \Rightarrow A(n),$$

dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) *Seien $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$ drei Aussagen über natürliche Zahlen n, wobei gelte: $A(n) \Rightarrow B(n)$ und $\neg A(n) \Rightarrow \neg C(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $C(1)$ zutrifft und wenn man zeigen kann dass $B(n-1) \Rightarrow C(n)$ für alle $n > 1$, dann gelten $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

4. Manipulieren mit geometrischen Summen:

a) $(*)$ Schreiben Sie die geometrische Summe $\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k}$ in die Form $\boxed{\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell\,(x-1)^\ell}$ um. Wie lauten die betreffenden Koeffizienten a_ℓ?

Hinweis: 'Binomi' führt auf eine Doppelsumme $-$ diese ist geeignet umzuordnen! Beachten Sie **1 a)**.

b) Setzen Sie $x = 1+\varepsilon$, multiplizieren Sie x^{n+1} aus und vereinfachen Sie die geometrische Summenformel

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}}$$

(Darstellung als Polynom in ε). Was passiert für $\varepsilon = 0$ (d.h. $x = 1$)? Ist das immer noch ein unbestimmter Ausdruck?

5. Die (bekannte) Formel für den Wert der Summe $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad (n \in \mathbb{N})}$ kann man mittels Induktion beweisen, falls man sie bereits kennt. Ein konstruktiver Weg zur Berechnung dieser Summenformel funktioniert wie folgt:

a) Betrachten Sie den Formelausdruck $F(k) = a\,k^3 + b\,k^2 + c\,k + d$ und bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ so dass $F(k+1) - F(k) = k^2$ für beliebige k. *What about d ?*

Anmerkung: $F(k)$ nennt man die *unbestimmte Summe* (oder auch *diskrete Stammfunktion*) der Folge der Zahlen $f(k) = k^2$.

b) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{n} \big(F(k+1) - F(k)\big)$.

c) $(*)$ Was meinen Sie: Funktioniert diese Methode in analoger Weise zur Berechnung von $\sum\limits_{k=1}^{n} k^p$ ($p \in \mathbb{N}$ beliebig)? Wie berechnet sich die betreffende unbestimmte Summe?

(Sie sollen hier nur das 'Muster' erkennen, ohne streng formal zu argumentieren.)

d) Wie lautet die unbestimmte Summe der geometrischen Folge $f(k) = x^k$ ($k \in N$)? (Dabei ist $x \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl. Achten Sie auf den Sonderfall $x = 1$.)

6. **a)** Seien A und B zwei beliebige Mengen, und für jedes $x \in A$ gelte $x \notin B$, d.h. $\boxed{\forall\, x \in A : \; x \notin B}$

Drücken Sie diese Eigenschaft mit Hilfe von $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, ... (oder was auch immer) aus.

b) Unter der Annahme, dass **a)** gilt: Was folgt dann aus $x \in B$?

c) Wie lautet die logische Umkehrung der Aussage aus **a)** ?

d) Gleiche Fragen wie unter **a)** – **c)**, mit $\exists$ anstelle von $\forall$.

7. **a)** Für zwei Mengen A, B bezeichnet $\boxed{A \triangle B}$ die Menge derjenigen Elemente aus A oder B, die nicht in beiden Mengen enthalten sind.

Drücken Sie $A \triangle B$

(i) in der Form $\ldots \setminus \ldots$, (ii) in der Form $\ldots \cup \ldots$

aus.

b) Unter einer *Partition* einer gegebenen Menge A versteht man eine Menge[1] bestehend aus Teilmengen $A_i \subseteq A$, $i \in I$, die *paarweise disjunkt* sind und deren Vereinigung gleich A ist: $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

(Dabei bedeutet 'paarweise disjunkt, dass gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die Indexmenge I könnte z.B. endlich sein, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, oder auch unendlich, z.B. $I = \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{R}$. Zu jedem $i \in I$ gehört genau ein A_i, d.h., die Abbildung $i \mapsto A_i$ definiert die Familie.)

$\rightsquigarrow$ Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Geben Sie eine einfache Partitionierung von $A = \mathbb{N}_0$ an, mit Indexmenge $I = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Stellen Sie die A_i in der Form $\{n \in \mathbb{N}_0 : \ldots\}$ dar (deskriptive Methode), und geben Sie einen Algorithmus (d.h. eine Rechenvorschrift) an, der bestimmt, in welchem der A_i eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ enthalten ist.

8. [ähnlich zu Testaufgaben aus WS 2012/13, 2013/14]

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $\boxed{f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad f(n) = \dfrac{n-1}{n+1}}$ **b)** $\boxed{f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x + \dfrac{1}{x}}$

9. Angenommen, A, B und C seien Mengen und $f \colon A \to B$, $g \colon f(A) \subseteq B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Ist $g \circ f$ injektiv, dann muss auch f injektiv sein.

b) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann muss auch g surjektiv sein.

c) Ist $g \circ f$ bijektiv, dann ist g surjektiv und f injektiv.

10. **a)** [Taschenrechner]

Eine Bakterienkultur wächst pro Minute um 10%. Um 3:00 beträgt die Population 1 Milliarde Bakterien. Wie viele sind es um 4:00 ? Wie viele waren es um 0:00, als die Kultur aufgesetzt wurde?

Kommentieren Sie auch die Tatsache, dass sich bei der Rechnung keine natürlichen Zahlen ergeben, also streng genommen keine 'Anzahl' von Bakterien.

b) Geben Sie für die unter **a)** betrachtete Situation eine allgemeine Formel an: Anzahl der Bakterien = $A(n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der seit 0:00 (Startzeitpunkt) vergangenen *Sekunden* ist. Wie lautet die Formel für $A(n)$?

---

[1] Man spricht dabei auch von der 'Familie' $\{A_i,\ i \in I\}$. Eine Familie ist eine Menge von Mengen o.ä..

1. a) Für $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ und $c < d$ definieren wir die Intervalle

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{Q} : a \le x \le b\}, \quad [c, d] = \{x \in \mathbb{Q} : c \le x \le d\}.$$

Geben Sie zwei möglichst einfache bijektive Abbildungen $f : [a, b] \to [c, d]$ und ihre Umkehrfunktionen $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ an,

(i) mit $f(a) = c,\ f(b) = d$, (ii) mit $f(a) = d,\ f(b) = c$.

b) Seien A, B endliche gleichmächtige Mengen und $f : A \to B$. Zeigen Sie:

$$\boxed{f \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijektiv}}$$

c) Wieviele bijektive Abbildungen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ auf sich selbst gibt es, und wie beweist man das? Beschreiben Sie diese Abbildungen in Worten.

2. Gegeben sei die reelle Funktion $\boxed{f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}}$

Dabei bedeutet $\sqrt{x}$ wie üblich die positive Wurzel aus $x \ge 0$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

b) Geben Sie $y \ge 0$ vor und lösen Sie die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Überprüfen Sie nochmals Ihr Ergebnis[1] aus **b)** und überlegen Sie, für welche Werte von y der betreffende Wert von x überhaupt wohldefiniert ist (als reelle Zahl). Was folgern Sie daraus?

3. [ähnlich zu früheren Testaufgaben]

a) Wandeln Sie den periodischen Dezimalbruch $\boxed{0.0740740740740740740740\ldots}$ in rationale Darstellung um.

b) Geben Sie die Dezimaldarstellung der rationalen Zahl $\boxed{\dfrac{10}{33}}$ an.

4. a) Welche Zahl wird durch die *binäre* Darstellung $0\,.\,\overline{1}$ repräsentiert?

b) Wandeln Sie die Dezimalzahl 0.1 in Binärdarstellung um.
Hinweis: Division in Binärarithmetik. (Ungewohnt, funktioniert jedoch analog wie in Dezimalarithmetik.)

c) Zeigen Sie: Jede endliche Binärzahl besitzt eine endliche Dezimaldarstellung. (Die Umkehrung gilt nicht; siehe **b)**.)

5. Welche Folgen (a_n) konvergieren? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert.

a) $\boxed{a_n = \dfrac{1 - 5\,n^4}{n^4 + 8\,n^3}}$

b) $\boxed{a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\,n - 1}}$

c) $\boxed{a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{k-n}}$

d) $\boxed{a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{-k}}$

e) $\boxed{a_n = \dfrac{2 + n}{2 + n\,(-1)^n}}$

f) $\boxed{a_n = \text{Produkt der Folgenelemente aus } \mathbf{d)} \text{ und } \mathbf{e)}}$

6. a) Für eine Folge (a_n) reeller Zahlen gelte

$$\boxed{\exists\, K \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \ge K : \ |a_n - a_{n-1}| \le c^n}$$

für eine Konstante c, $0 < c < 1$. Zeigen Sie: Die Folge ist konvergent.

[1] Falls Sie unter **b)** bereits sorgfältig und korrekt vorgegangen sind, haben Sie **c)** bereits vorweggenommen.

b) Die beiden Folgen (a_n) und (b_n) seien definiert als die beiden Lösungen[2] der quadratischen Gleichung

$$\boxed{x^2 - n\,x + 1 = 0 \quad (n \in \mathbb{N})}$$

Studieren Sie die Konvergenz dieser Folgen sowie die Konvergenz der Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n\,b_n)$.

7. Unter dem *Limes superior* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ bzw. dem *Limes inferior* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ einer Folge (a_n) versteht man deren größten bzw. kleinsten Häufungspunkt.

Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ (falls diese existieren) für die Folgen

a) $\boxed{a_n \;=\; 1 + (-1)^n + 2^{-n}}$ **b)** $\boxed{a_n \;=\; 2^n}$ **c)** Folge aus **5 e)**

Zusatzfrage: Wie charakterisiert man Konvergenz einer Folge mittels lim sup und lim inf ?

8. [Prüfungsaufgabe, 2012]
Sei $c > 0$ vorgegeben. Durch die Rekursion

$$\boxed{a_1 = c \quad \text{und} \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}\;,\quad n \geq 2}$$

ist eine Folge (a_n) reeller Zahlen definiert.

a) Geben Sie alle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ an, die als Grenzwert dieser Folge infrage kommen.

Hinweis: Für eine konvergente Folge (a_n) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$

b) Stellen Sie eine Vermutung darüber an, wie die a_n aussehen, und beweisen Sie Ihre Vermutung.

c) Entscheiden Sie die Frage nach der Konvergenz in Abhängigkeit von dem Startwert c und geben Sie ggf. den Grenzwert an.

9. $(*)$ Wir betrachten zwei rekursiv definierte Folgen (a_n) und (b_n). Die beiden Folgen sind jedoch nicht unabhängig voneinander: Für gegebene Startwerte a_1, b_1 sei

$$\boxed{\begin{aligned} a_{n+1} &= c\,\big(a_n + b_n\big)\,, \\ b_{n+1} &= c\,\big(a_n - b_n\big) \end{aligned}}$$

für $n \geq 1$, mit einem festen Parameter $c > 0$. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, dass alle auftretenden Folgenglieder a_n und b_n positiv sind.

a) Geben Sie – in Abhängigkeit von dem Parameter[3] c – alle möglichen Paare (a, b) and, die als Grenzwert in Frage kommen. D.h.: Falls sowohl (a_n) als auch (b_n) konvergieren, dann kommen für den Grenzwert (a, b) nur bestimmte Werte infrage.

b) Geben Sie Wertebereiche für den Parameter c an, so dass beide Folgen entweder sicher konvergieren oder aber mindestens eine von ihnen divergieren muss.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(a_n^2 + b_n^2)$.

c) Was passiert im Grenzfall, d.h. für denjenigen Wert von c, der den Konvergenzbereich vom Divergenzbereich abgrenzt?

Diese Frage ist zunächst experimentell zu verstehen (Ausprobieren am Rechner). Was beobachten Sie? Genauere Details dann in der Übung.

10. [Prüfungsaufgaben, 2012, 2014]

a) Sei (a_n) eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen mit positivem Grenzwert a.

Beweisen Sie: Die Folge $(1/a_n)$ ist beschränkt.

b) Sei x der Grenzwert einer konvergenten Folge und y eine reelle Zahl, die weder mit x noch mit irgendeinem Folgenelement x_n übereinstimmt.

Beweisen Sie: Es existiert eine ε - Umgebung von y, in der sich keines der Folgenglieder x_n befindet.

---

[2] Für $n = 1$ sind die Lösungen nicht reell. Für $n = 2$ hat man eine doppelte Lösung und daher $a_2 = b_2$.
[3] Achtung Sonderfall!

1. a) Eine Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $\boxed{a_{n+1} \;=\; 2\sqrt{a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}}$ mit einem gegebenen Startwert $a_1 \geq 0$.

Geben Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$ an, die als Grenzwert der Folge infrage kommen.

b) Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge für beliebige Startwerte $a_1 > 0$.

Hinweis: Achten Sie auf das Monotonieverhalten.

2. a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\boxed{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}}$

b) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\boxed{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n(n+2)} \Big)}$

c) Stellen Sie die Reihe $\boxed{x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots}$ in $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ldots$ Notation dar.

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe?

d) $(*)$ Berechnen Sie den Wert der Reihe $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n \quad (|x| < 1)}$

Hinweis: Versuchen Sie das Problem auf die geometrische Reihe zurückzuführen, unter Verzicht auf einen strengen Beweis der daraus zu vermutenden Formel (später!).

3. Stellen Sie fest, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihen [bedingt, absolut] konvergieren:

a) $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ **b)** $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n}$ **c)** $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \; (k \in \mathbb{N})}$ **d)** $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k\,x^n \; (k \in \mathbb{N})}$

4. a) [Prüfungsaufgabe (2014)]: Überprüfen Sie die Konvergenz der Reihe $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}}$

b) [Prüfungsaufgabe (2014)]:

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}\,x^n}$ absolut konvergent?

c) [Prüfungsaufgabe (2013)]:

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(x + \frac{x}{n}\Big)^n}$ absolut konvergent?

d) Untersuchen Sie die bedingte und die absolute Konvergenz der Reihe $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\tfrac{1}{n}\sqrt{n + \tfrac{1}{n}}}$

5. $(*)$ Eine Doppelreihe: Sei $p \in (0, \infty)$. Wir betrachten die Reihe

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + (n+k)^p}}$$

Für welche p konvergiert diese Reihe?

Hinweis: In ähnlicher Weise wie für das Cauchy-Produkt von Reihen (Satz 5.15) kann man zeigen, dass im Fall der absoluten Konvergenz der gegebenen Reihe jede Umordnung gegen denselben Wert konvergiert. Verwenden Sie eine Umordnung gemäß einem Diagonalverfahren.

6. Herr B. kehrt zusammen mit seinem Dackel Bello von Stammersdorf zurück. Zum Zeitpunkt $t =$ 0:00 (Tür beim Heurigen) befinden sie sich 1 km von zuhause entfernt. Bello, der doppelt so schnell unterwegs ist wie Herr B., läuft schnurstracks bis nach Hause voraus. Da die Tür verschlossen ist, macht er auf der Stelle kehrt und läuft Herrn B. wieder entgegen. Danach wiederholt sich dieses Spiel immer wieder.

a) Einen wie langen Weg legt Bello insgesamt zurück?

b) Berechnen Sie die Entfernungen von den Treffpunkten zu Herrn B.'s Haus, die den Zeitpunkten entsprechen, an denen die beiden immer wieder zusammentreffen.

c) Stellen Sie die Antwort zu **a)** als unendliche Reihe dar, die sich aus **b)** ergibt.

7. Für eine gegebene nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{R}$ definieren wir die Funktion

$$\boxed{d_A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d_A(x) = \inf_{a\in A} |x-a|}$$

a) Interpretieren Sie diese Definition und geben Sie der Funktion d_A einen Namen.

b) Geben Sie die Funktion $d_{[0,1]}$ explizit an und zeichnen Sie ihren Graphen. Ist $d_{[0,1]}$ stetig?

c) Gleiche Frage wie unter **b)**, für $d_{(0,1)}$.

d) Gleiche Frage wie unter **b)**, für $d_{\{0,1\}}$.

e) Zeigen Sie: *Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist das Bild $d_A(A)$ unbeschränkt.*

f) Ist auch die folgende Aussage wahr?
Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ unbeschränkt ist, dann ist das Bild $d_A(A)$ beschränkt.

8. Zu untersuchen ist die Stetigkeit bzw. allfällige Unstetigkeitsstellen und stetige Fortsetzbarkeit für folgende Funktionen.

a) $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, mit $\boxed{f(x) = g(x) \ \text{ für } \ x \in [0,1], \quad \text{und} \quad f(x) = g(x-1) \ \text{ für } \ x \in (1,2]}$

Dabei ist $g:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion. Geben Sie inbesondere an, welche Bedingung $g(x)$ erfüllen muss, damit die Funktion $f(x)$ stetig ist.

b) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, mit $\boxed{f(x) = p(1/x)}$ Dabei ist $p(x)$ ein gegebenes Polynom.

c) Gibt es Polynome p, so dass sich die unter **b)** definierte Funktion f an der Stelle $x = 0$ stetig fortsetzen lässt?

d) $f\colon (-r,r)\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, mit $\boxed{f(x) = \dfrac{\sqrt{1+p(x)}-1}{x^2}}$

Dabei ist $p(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\, x^i$ ein gegebenes Polynom ist mit $p(0) = 0$.

(i) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x)$ ist wohldefiniert für hinreichend kleines $r > 0$.

(ii) Für $x = 0$ ergibt sich der undefinierte Ausdruck '$f(0) = 0/0$'. Untersuchen Sie, für welche Polynome p an der Stelle $x = 0$ eine hebbare Unstetigkeit vorliegt. Falls dies zutrifft, geben Sie den Wert der stetigen Fortsetzung an, d.h. den Limes

$$\lim_{x \to 0} f(x)\,.$$

In welcher Weise hängt dieser Limes von dem Polynom p ab?

9. Die Funktionen $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien (in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$) definiert als $\boxed{f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + |nx|}}$

a) Untersuchen Sie die Stetigkeit dieser Funktionen.

b) Zeichnen Sie einige Funktionsgraphen für $n = 1, 2, 3, \ldots$

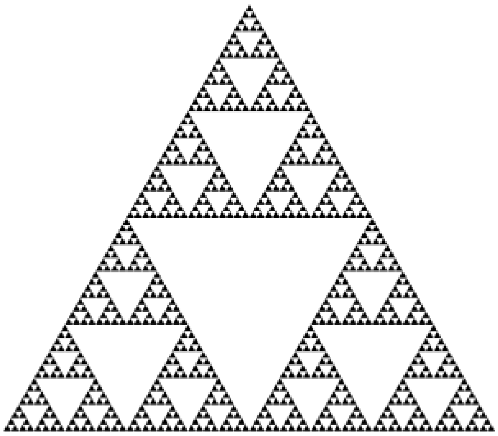
c) Die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\boxed{f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)}$

Geben Sie f explizit an. Ist f stetig?

d) $(*)$ Sei $\boxed{g_n(x) = \dfrac{nx}{1 + (nx)^2}}$

Vermutung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Ist diese Vermutung richtig?

10. Ein gegebenes Dreieck Δ mit Eckpunkten A, B, C wird in 4 kleinere, zu Δ ähnliche Dreiecke unterteilt, die dadurch entstehen, dass man die Seiten von Δ in der Mitte teilt und diese 3 Punkte als neue Eckpunkte für die kleineren Dreiecke verwendet. Dieser Prozess wird rekursiv fortgesetzt, siehe Skizze (diese zeigt den Spezialfall eines gleichseitigen Dreiecks).



In dieser Weise erzeugt man eine Folge von immer kleineren, zu Δ ähnlichen Dreiecken ∇_k, die in der Skizze weiß erscheinen (1 kleines ∇, 3 noch kleinere ∇'s, 9 noch noch kleinere ∇'s, …). Wenn man sich diesen Prozess unendlich oft fortgesetzt denkt − gegen welchen Wert konvergiert die Summe der Flächeninhalte aller dieser Dreiecke ∇_k (im Vergleich zur Fläche des gegebenen Dreiecks Δ)?

1. a) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es gelte $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie:
Es existiert ein $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ *mit* $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(x) := f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$.

b) Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Zeigen Sie:
$g(x) := |f(x)|$ *ist ebenfalls stetig auf* $[a,b]$.

2. Die Funktion $f(x)$ sei definiert als $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}}$

a) Wie lautet der Definitionsbereich von f?

b) Geben Sie für $f(x)$ eine explizite Darstellung an und untersuchen Sie die Stetigkeit von f.

c) Gleiche Frage wie unter **a)**, **b)**, für $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}}$

3. a) $(*)$ Sei I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, und (x_n) sei eine Cauchyfolge in I. Zeigen Sie:
$(f(x_n))$ *ist ebenfalls eine Cauchyfolge.*

b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Aussage aus **a)** nicht zutreffen muss, wenn f nur als stetig vorausgesetzt wird.

4. a) Gegeben seien zwei Lipschitz-stetige Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit Lipschitz-Konstante L_f bzw. L_g.

Sind die Funktionen $\boxed{f+g, \quad f \cdot g, \quad f \circ g}$ dann ebenfalls garantiert Lipschitz-stetig, bzw. welche zusätzliche Annahmen werden dafür benötigt? Geben Sie die betreffenden Lipschitz-Konstanten an.

b) Unter **a)** wurde in einem der Fälle eine zusätzliche Annahme benötigt. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Lipschitz-Stetigkeit tatsächlich verletzt sein kann, wenn diese Annahme nicht erfüllt ist.

c) Sei $f\colon [a,b] \to [c,d]$ stetig und bijektiv. Geben Sie eine Bedingung an f an, die sicherstellt, dass $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ Lipschitz-stetig ist.

d) Diskutieren Sie **c)** konkret für den Spezialfall aus UE 2, Aufgabe **1a)**.

e) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Lipschitz-stetig, und (x_n) eine Folge in $[a,b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Was können Sie über die Folge $\left(\frac{f(x_n)-f(x^*)}{x_n - x^*}\right)$ aussagen? Wie sieht es mit der Konvergenz aus?

5. Eine physikalische Größe x wird gemessen, wobei ein kleiner Messfehler der maximalen Größe δ unvermeidlich ist, d.h. die Messung liefert einen Wert $\tilde{x}$ mit $|\tilde{x} - x| \le \delta$. Wir fragen nach dem Effekt dieses Messfehlers auf den Funktionswert $f(x)$.

a) f sei als stetig vorausgesetzt (sonst sei über f nichts bekannt). Kann man dann eine explizite Schranke für die maximale Abweichung $|f(\tilde{x}) - f(x)|$ angeben?

b) Welche zusätzliche Information über f wird benötigt, damit eine Schranke für $|f(\tilde{x}) - f(x)|$ angegeben werden kann, und wie lautet diese Schranke?

c) Sei konkret $f(x) = \sqrt{x}$ und $x, \tilde{x} > 0$. Geben Sie die gesuchte Schranke an. Ihr Kommentar dazu?

6. Funktionen können auch *implizit* definiert sein, d.h. als Lösung einer parameterabhängigen Gleichung. Betrachten Sie die Gleichung

$$\frac{y-1}{x+1} = 1 - xy$$

für die Unbekannte y in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$. Durch ihre Lösung ist eine Funktion $y = f(x)$ definiert. Wie lautet diese? Ist sie wohldefiniert und stetig für alle $x \in \mathbb{R}$?

Besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = -1$. Was ist $f(-1)$?

7. Geben Sie jeweils einen Wert für den Parameter c an, so dass die Funktion − falls möglich − stetig fortsetzbar ist, und geben Sie den Funktionswert der stetigen Fortsetzung an.

a) $\boxed{f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - c}\,, \quad n \in \mathbb{N}}$ (stetige Fortsezung an $x = c$)

b) $\boxed{f(x) = \dfrac{x^n - 1}{(x - c)^2}\,, \quad n \in \mathbb{N}}$ (stetige Fortsezung an $x = c$)

c) $\boxed{f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - c}{x}}$ (stetige Fortsezung an $x = 0$)

d) (∗) $\boxed{f(x) = \dfrac{(1+x)^{1/3} - (1 + c\,x)}{x^2}}$ (stetige Fortsezung an $x = 0$)

Hinweis: Lemma 1.2.

8. Gegeben sei die quadratische Gleichung $\boxed{x^2 - b\,x + 1 = 0}$

a) Geben Sie die beiden Funktionen $x_1(b)$, $x_2(b)$ an, die den beiden Lösungen entsprechen (dabei sind nur diejenigen Werte von b zu berücksichtigen, für die sich reellwertige Lösungen ergeben).

b) Zeigen Sie: Für jedes $x > 0$ gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}$, so dass x eine Lösung der gegebenen Gleichung ist. Dies definiert eine Funktion $b = f(x)$. Geben Sie diese Funktion f konkret an.[1] Ist f injektiv?

c) Setzen Sie die beiden Funktionen $x_1(b)$, $x_2(b)$ aus **a)** und die Funktion $f(x)$ aus **b)** zueinander in Beziehung.

9. [ähnlich zu Prüfungsaufgaben:]

a) Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Aussage zutrifft.

Sei $f\colon\, [a;b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf dem offenen Intervall (a,b) 'strikt positive Funktion', d.h., $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $f(x) \geq \varepsilon$ für alle $x \in (a,b)$. *Dann gilt auch* $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \geq \varepsilon$.

b) Snoopy ist zwar (nur) ein Hund, er interessiert sich aber für Analysis. Charley Brown sagt:

Stell dir eine stetige Funktion f vor mit der Eigenschaft $f(0) = 0$, und eine konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Dann ist ja klar, dass auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ konvergieren muss.

Darauf Snoopy: *Nein, das trifft nicht notwendigerweise zu.* Snoopy hat natürlich wie immer Recht. Warum? Geben Sie ein Beispiel an, das Snoopys Argument zwingend untermauert.

c) Beweisen Sie den **Satz von Snoopy:** Dieser bezieht sich auf die unter **b)** betrachtete Situation, und wir nehmen zusätzlich an, dass gilt:

- Die Reihe $\sum_n a_n$ ist absolut konvergent, sowie
- $\exists\, \varepsilon > 0:\quad f$ ist Lipschitz-stetig auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Dann gilt: $\sum_n f(a_n)$ ist ebenfalls absolut konvergent.

10. (∗) Die Cantor-Funktion (auch *Devil's Staircase* genannt):

Wir definieren eine Folge von Funktionen $f_n\colon\, [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ rekursiv durch $f_0(x) = x$, sowie

$$\boxed{f_n(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2}\, f_{n-1}(3\,x), & 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2}\,\big(1 + f_{n-1}(3\,x - 2)\big), & \frac{2}{3} < x \leq 1. \end{cases}}$$

a) Zeigen Sie: Die Funktionen $f_n(x)$ sind wohldefiniert, und alle Funktionswerte liegen in $[0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Können Sie die Funktionswerte auch noch genauer eingrenzen?

b) Zeigen Sie: Die f_n sind stetig für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

c) (freiwillig:) Schreiben Sie ein Computerprogramm, das für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ den Graphen der Funktion $f_n(x)$ zeichnet.

Anmerkung: Die *Devil's Staircase*−Funktion erhält man für $n \to \infty$. Man kann zeigen, dass der Limes $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in [0,1]$ existiert und dass f stetig ist. Es gilt $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, und f ist für 'fast alle' $x \in [0,1]$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$.

[1] Grafische Darstellung am Rechner ist hier hilfreich für das Verständnis.

1. Bestimmen Sie die reelle Faktorisierung der folgenden Polynome:

a) $\boxed{2\,x^3 - 12\,x^2 + 22\,x - 12}$

b) $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, x^k \quad (n \in \mathbb{N})}$

c) $\boxed{x^4 - (n^2+1)\,x^2 + n^2 \quad (n \in \mathbb{N})}$

d) $\boxed{x^3 - 1}$

e) $\boxed{x^2 - (a+b)\,x + a\,b \quad (a, b \in \mathbb{R})}$

f) $\boxed{x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (a\,b + b\,c + c\,a)\,x - a\,b\,c \quad (a, b \in \mathbb{R})}$

Hinweis: Erraten Sie die Nullstellen.

2. a) Bestimmen Sie – ggf. mit Computerunterstützung – das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0 \ldots 3\}$:

(i) $\{\,(0,0),\ (1,0),\ (2,0),\ (3,0)\,\}$
(ii) $\{\,(0,1),\ (1,0),\ (2,0),\ (3,0)\,\}$
(iii) $\{\,(0,0),\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9)\,\}$
(iv) $\{\,(0,-1),\ (1,0),\ (2,1),\ (3,8)\,\}$
(v) $\{\,(0,e^0),\ (1,e^{-1}),\ (2,e^{-2}),\ (3,e^{-3})\,\}$

b) Werten Sie das unter **a)**, (v) berechnete Polynom $p(x)$ an der Stelle $x = 1/2$ am Rechner mittels des Hornerschemas aus, und berechnen Sie den Interpolationsfehler $p(1/2) - e^{-1/2}$.

c) Zeichnen Sie am Rechner grafisch den Verlauf des unter **a)**, (v) berechneten Polynoms $p(x)$ für $x \in [0,5]$, und vergleichen Sie dies mit dem Verlauf der Funktion e^{-x}. Was beobachten Sie?

3. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

a) [Testaufgabe, WS 2013/14:] $\boxed{\dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 1}}$

b) [Testaufgabe, WS 2013/14:] $\boxed{\dfrac{1}{1 - x^4}}$

c) [Testaufgabe, WS 2010/11:] $\boxed{\dfrac{x^2 - 5\,x + 4}{x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6}}$

d) $\boxed{\dfrac{1}{x^2 - (c+1)\,x + c} \quad (c \in \mathbb{R})}$

Für welchen Wert von c tritt ein Sonderfall auf? Berücksichtigen Sie diesen separat. Schauen Sie sich auch die PBZ genauer an für den Fall, dass c sehr nahe an diesem Wert liegt. Was fällt Ihnen auf?

4. a) Überlegen Sie sich basierend auf der Definition der Euler'schen Zahl e eine Funktion $f(t)$, für die gilt

$$\boxed{\lim_{t \to 0+} f(t) = e}$$

wobei $f(0)$ nicht direkt auswertbar ist (hebbare Unstetigkeit). Approximieren Sie nun e numerisch, indem Sie $f(t)$ an den Stellen $t = 1/2,\ 1/4,\ 1/6$ durch ein Polynom vom Grad 2 interpolieren und dieses an der Stelle $t = 0$ auswerten. [1]

b) Die unter **a)** berechnete Approximation von e ist nicht sehr genau. Wie könnte man sie verbessern?

c) Alternativ dazu könnte man daran denken, den Wert von $f(t)$ für sehr kleine $t = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$) als Approximation für $f(0) = e$ zu verwenden. Testen Sie es am Rechner aus aus für $n = 10^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wie verhält sich der Fehler $f(1/n) - f(0)$ mit wachsendem k? Wie sieht es mit dem Rechenaufwand aus?

5. a) Eine zeitabhängige Größe sei exponentiell wachsend gemäß der Funktion

$$\boxed{f(t) = e^{\lambda t}, \quad t \geq 0}$$

wobei $\lambda > 0$. Sei $t \geq 0$ irgendein Zeitpunkt. Bestimmen Sie Δt so, dass $f(t + \Delta t) = 2\, f(t)$, d.h. nach einem weiteren Zeitintervall Δt hat sich der Funktionswert verdoppelt. Hängt die Lösung Δt von t ab?

b) Gleiche Frage wie unter **a)**, mit $\lambda < 0$ (exponentielles Abklingen) und Halbierung statt Verdoppelung.

c) [Prüfungsaufgabe, 2014:] Für die Strahlungsintensität $I(t)$ einer radioaktiven Substanz gelte [2]

$$\boxed{I(t) = e^{\alpha_1 t}\, I(0) \quad \text{für} \quad t \in [0, t_1]\,.}$$

Für $t > t_1$ verändert sich diese, und es gelte

$$\boxed{I(t) = e^{\alpha_2 (t - t_1)}\, I(t_1) \quad \text{für} \quad t \in [t_1, t_2]\,.}$$

Geben Sie $\beta \in \mathbb{R}$ an, so dass $I(t_2) = e^{\beta\, t_2}\, I(0)$. Schreiben Sie β in der Form $\beta = \alpha_1\, c_1 + \alpha_2\, c_2$ mit passenden c_1 und c_2.

d) Sei $\varphi(x)$ eine berechenbare Approximation für e^x auf dem Intervall $[0, \ln 2]$ (z.B. ein Interpolationspolynom). Wie gewinnt man daraus eine Approximation für e^x für beliebige $x \in \mathbb{R}$? Spezifizieren Sie einen entsprechenden Algorithmus.

e) In der Standard-Arithmetik (Gleitpunktarithmetik, *double precision*) auf gängigen Mikroprozessoren kann man (endlich viele) Zahlen im Bereich von etwa $[10^{-300}, 10^{300}]$ darstellen. Geben Sie ein Intervall $[a, b]$ an, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $e^x \in [10^{-300}, 10^{300}]$.

6. a) Stark wachsende oder fallend Exponentialfunktionen $f(x)$ lassen sich nicht gut direkt grafisch darstellen, weil ihre Werte über viele Größenordnungen variieren. Man wählt daher eine logarithmische Darstellung, d.h. man zeichnet z.B. $\log_{10}(f(x))$.

Sei $\boxed{f(x) = a^x, \quad x \geq 0}$, wobei $a > 0$. Beschreiben Sie genau, wie der Verlauf von $\log_{10}(f(x))$ aussieht. Was ergibt sich speziell für $a = 10^k$ ($k \in \mathbb{Z}$)?

b) Für eine Potenzfunktion $\boxed{f(x) = x^a, \quad x > 0}$, mit $a \in \mathbb{R}$, eignet sich eine *doppelt-logarithmische* Darstellung:

Setze $\xi = \ln x$ und $\eta = \ln(f(x))$. Dann entspricht die Funktion $f(x) = a\, x$ einer Funktion $\eta = g(\xi)$. Geben Sie die Funktion g an.

Angenommen, Sie kennen den Wert von a nicht – wie können Sie diesen aus der doppelt-logarithmischen Darstellung ablesen?

---

[1] Eine derartige Vorgangsweise wird als *Extrapolation* bezeichnet und leistet in vielen Fällen nützliche Dienste für die numerische Approximation unbestimmter Ausdrücke oder nichttrivialer Grenzwerte.

[2] $I(0)$ ist die Strahlungsintensität zum Zeitpunkt $t = 0$.

7. Sei $W(x)$ definiert als die Umkehrfunktion von $f(x) = x\,e^x,\ x \geq 0$. Diese ist nicht in elementarer Weise darstellbar aber wohldefiniert, und wir nehmen sie als neue Funktion in unseren Zoo von Standardfunktionen auf.[3]

a) (i) Zeigen Sie: $W(x)$ ist strikt monoton wachsend für $x \geq 0$.

(ii) Drücken Sie $\ln(W(x))$ mittels $\ln x$ und $W(x)$ aus und bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{W(x)}$.

Hinweis: $x = W(x)\,e^{W(x)}$.

b) (i) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x = e^{-x}$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

(ii) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x^2 = e^{-x}$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

8. a) Beweisen Sie die Identitäten

$\boxed{\text{(i)}\ \ 2\cos^2 x = 1 + \cos(2\,x)}$ $\boxed{\text{(ii)}\ \ 2\sin^2 x = 1 - \cos(2\,x)}$

b) Beweisen Sie die Identitäten

$\boxed{\text{(iii)}\ \ 4\cos^3 x = 3\cos x + \cos(3\,x)}$ $\boxed{\text{(iv)}\ \ 4\sin^3 x = 3\sin x - \sin(3\,x)}$

9. Zeichnen Sie die folgenden 'modulierten' trigonometrischen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$:

a) $\boxed{\cos x\ \sin(2\,x)}$

b) $\boxed{\sin x\ \sin(2\,x)}$

c) $\boxed{\sin x\ \cos(n\,x)}$ mit $n \in \mathbb{N}$ 'groß'

Anmerkung: Es geht hier nur um die Grafik und den richtigen qualitativen Verlauf. Eine systematische Kurvendiskussion für diese Funktionen führen wir später durch.

10. Jeder Punkt (x, y) auf einem Kreis in der Ebene mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r ist in Polarkoordinaten eindeutig darstellbar als $(x, y) = (r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Spezifizieren Sie eine Funktion

$\boxed{\operatorname{atan2}(y, x)}$

in den zwei Variablen y und x, die zu beliebigen gegebenem (x, y) auf dem Einheitskreis den entsprechenden Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ zurückliefert.

Hinweis: Machen Sie eine Skizze. Die Funktion ist stückweise (per Quadrant) definiert. Verwenden Sie arctan, aber vermeiden Sie Division durch 0, d.h. $x = 0$ ist ein Sonderfall.

Was ist $\operatorname{atan2}(0, 0)$?

[3] Viele wichtige Funktionen der mathematischen Physik sind nicht elementar und als Umkehrfunktionen oder über Integrale etc. definiert. Für die rechnerische Praxis besteht kein wesentlicher Unterschied, weil alle diese Funktionen – inklusive der elementaren Funktionnen – am Computer numerisch approximiert werden müssen.

1. a) [ähnlich zu Testaufgabe aus 2013/14:]

Sei f eine differenzierbare Funktion. Geben Sie für $\boxed{\frac{d}{dx}\big(f(x^3)\big)^c \quad (c \in \mathbb{R})}$ einen expliziten Formelausdruck an (in Abhängigkeit von f und f').

b) Beweisen Sie die Identität $\boxed{\frac{d}{dx}\, e^x \;=\; e^x \quad (x \in \mathbb{R})}$, indem Sie von der Ableitungsformel für $\ln x$ ausgehen.

c) Für zwei differenzierbare Funktionen $f(y)$ und $y(x)$ gelte $\boxed{f(y(x)) \;\equiv\; \text{const.}}$

Geben Sie eine hinreichende Bedingung an f an, so dass gilt $y(x) \;\equiv\; \text{const.}$

2. a) Seien f und g zweimal differenzierbare Funktionen. Berechnen Sie $\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\, f\big(g(x)\big)}$

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare [un]gerade Funktion. Ist dann auch die Ableitung $f'(x)$ [un]gerade? Beweisen Sie ein entsprechendes Resultat.

c) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion ☺

$$\boxed{f(x) \;=\; \frac{5\sin(3x + b\sqrt{x^2+e^{2x}})\,\tan\!\big(\frac{k^2x^2}{1+u^2x^2}\big) + \sqrt[3]{\frac{ax-\ln x}{a^2+x^2}}}{\arccos\!\big(\frac{x}{\sqrt{3+x}}\big) + \frac{3a^2x^3}{\arctan(1/x)} + e^{-\frac{x^2-b^2}{2}}\,\arcsin\sqrt{\frac{3x}{1-x^2}}}}$$

3. a) Seien f und g zwei auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(0) = g(0)$ und $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Führen Sie das Additionstheorem für den Sinus auf das Additionstheorem für den Cosinus zurück.

c) $(*)$ Sei $x \in (-1,1)$. Differenzieren Sie $\boxed{f(x) = 2\,\arctan x,\;\; g(x) = \arcsin\Big(\frac{2\,x}{1+x^2}\Big)}$
Was schließen Sie daraus?

Hinweis: Schreiben Sie $g'(x)$ in der Form $f'(x)\cdot(\ldots)$ und vereinfachen Sie.

4. Unter welchen Voraussetzungen an die Funktion $f(x)$ existieren die Grenzwerte

$$\boxed{\textbf{a)}\;\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2\,h}\,, \qquad \textbf{b)}\;\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2\,f(x)+f(x-h)}{h^2}} \;\;?$$

Wie lautet dann jeweils der Grenzwert?

5. Berechnen Sie die in UE 4, Aufgabe 7 betrachteten Grenzwerte (sofern sie existieren) mit Hilfe der Regel von de l'Hospital. Geht es auch direkter?

6. a) [Prüfungsaufgabe, 2013:]

Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade $g(x) = c\,x$ den Graphen der Funktion $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = \xi > 0$ berührt. Geben Sie auch die Stelle ξ an.

b) [Prüfungsaufgabe, 2013:] Gegeben sei die Funktion $\boxed{f(x) \;=\; x^2\, e^{|x|}}$

Für welches $n \in \mathbb{N}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ k mal stetig differenzierb0 für alle $k \le n$? Untersuchen Sie für dieses n auch das Verhalten von $f^{(n+1)}$.

7. a) Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass der Graph der Funktion

$$\boxed{f(x) \;=\; \big(1+x\big)^{\frac{1}{n}} \quad (n = 2,3,4,\ldots)}$$

für $x > 0$ unterhalb seiner Tangente an der Stelle $x = 0$ verläuft. Haben Sie auch einen alternativen Beweis anzubieten?

b) Die Euler'sche Zahl e ist definiert als $\lim\limits_{n\to\infty}\big(1+\frac{1}{n}\big)^n$. Wir betrachten nun die Funktion

$$\boxed{f(t) \;=\; \big(1+t\big)^{1/t}} \quad \text{(vgl. UE 5, Aufgabe 4).}$$

Zeigen Sie, dass tatsächlich gilt $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = e$.

(Das ist ein allgemeinerer Limes als in der Definition von e !)

c) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f(t)$ aus **b)** an der Stelle $t = 0$ stetig fortsetzbar ist, und berechnen Sie den entsprechenden Wert $f'(0)$.

Hinweis: Schreiben Sie $f'(t)$ in der Form $f'(t) = f(t)\cdot g(t)$ und berechnen Sie $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$.

Zusatzfrage: Was folgern Sie daraus für die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$ gegen e? (Vgl. UE 5, Aufgabe 4.)

8. Aufgabe zur Fehlerrechnung mit Hilfe von Ableitungen:

a) Frau D. sitzt im Donaupark in der Wiese und misst ihre Entfernung zum Donauturm: a m. Dann misst sie von ihrer Position aus den Winkel α zwischen Boden und Turmspitze. Daraus errechnet sie die Höhe h des Turmes (als einfachen Funktionsausdruck in a und α).

Welchen Effekt haben unvermeidliche kleine Störungen in der Messung von a bzw. α auf das Ergebnis in dem errechneten Wert für h? Welche Standorte von Frau D. wirken sich sehr ungünstig auf die Genauigkeit des Ergebnisses aus?

Anmerkung: Bei den Ableitungen von h nach a und α handelt es sich eigentlich um partielle Ableitungen. Dabei denkt man sich einmal a festgehalten und differenziert nach α, und umgekehrt.

b) Drücken Sie das Ergebnis aus **a)** mit Hilfe von h (fest, 252 m) und α aus. Wie würden Sie α in etwa wählen, damit die Fehleranfälligkeit möglichst gering ist? Begründen Sie Ihre Wahl.

Anmerkung: Eine allfällige Abhängigkeit der Messgenauigkeit von der Distanz zwischen Frau D. und dem Donauturm haben wir dabei nicht berücksichtigt.

9. [a), b) ähnlich zu Prüfungsaufgabe, 2014:]

Zwei Kometen K_1, K_2 bewegen sich entlang folgender Bahnen in der (x,y) - Ebene:

$$\boxed{K_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}, \quad K_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2\,t \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}}$$

a) Entscheiden Sie, ob die Kometen zu irgend einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ kollidieren. Falls ja, geben Sie den Zeitpunkt $t = t_{koll}$ der Kollision an. Falls nein, geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt $t = t_{min}$ die Kometen minimalen Abstand zueinander haben, und geben Sie den minimalen Abstand an. Gibt es mehrere Minima?
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Funktion $f(t)$.

b) Untersuchen Sie, ob die unter **a)** betrachtete Funktion $f(t)$ auf ganz $\mathbb{R}$ konvex bzw. strikt konvex ist.

c) Berechnen Sie alle Schnittpunkte der beiden Kometenbahnen.

– Worin besteht der Unterschied zu Frage **a)**?

– Auf welche Schwierigkeit stoßen Sie hier? Wie gehen Sie damit um?

10. 'Physik-Aufgaben':

a) Auf einem unbekannten Planeten wirft ein Astronaut [1] einen Stein mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s senkrecht nach oben. Nach 10 Sekunden fällt der Stein zu Boden.

- Wie groß ist – in m/s^2 – die Beschleunigung auf Grund der Gravitation (also das Analogon zur Erdbeschleunigung) auf diesem Planeten?
- Wie hoch fliegt der Stein?

Hinweis: Sie benötigen ein (sehr einfaches) Integral.

b) Diskutieren Sie die Frage, ob es – bei hinreichend großer Abwurfgeschwindigkeit – möglich ist, dass sich der Stein vom Planeten wegbewegt und in den Weiten des Alls verschwindet.

---

[1] Der Einfachheit halber: Die Körpergröße des Astronauten wird vernachlässigt.

1. Führen Sie für die in UE 5, Aufgabe 9 a) betrachtete Funktion eine komplette Kurvendiskussion durch.

2. **a)** [Prüfungsaufgabe vom 11.10.2013:] Gegeben sei die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(x) \;=\; \frac{\big(\ln x\big)^2}{x}}$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze. Charakterisieren Sie inbesondere das asymptotische Verhalten für $x \to 0$ und $x \to \infty$.

b) [Prüfungsaufgabe vom 12.12.2014:] Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(x) \;=\; \arctan(x^3)}$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

Hinweis: Die Wendepunkte können Sie jeweils direkt berechnen. Die Bestimmung und Auswertung der 3. Ableitung ist ein bisschen mühevoll; mit Rechnerunterstützung ist das natürlich kein Problem.

3. **a)** Seien $a, b \geq 0$ und $p \geq 1$ reelle Zahlen. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\boxed{(a+b)^p \;\leq\; 2^{p-1}\,(a^p + b^p)}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion $f(x) = x^p$ konvex ist für $x \geq 0$, und nützen Sie dies aus.

b) $(*)$ Für den Spezialfall $p \in \mathbb{N}$ kann man die Ungleichung auch mittels vollständiger Induktion beweisen. (Freiwillige Wiederholung zum Thema vollständige Induktion.)

Man sieht: Der 'analytische' Beweis aus **a)** ist allgemeiner und dabei auch etwas einfacher.

4. Wir betrachten die von einem Parameter $p > 0$ abhängige Familie von Funktionen

$$\boxed{f_p(x) \;=\; x^p\, e^{-x}} \qquad \text{für } x \geq 0.$$

a) Klären Sie, ob diese Funktionenfamilie *gleichmäßig (nach oben) beschränkt* ist, d.h. ob eine Konstante C existiert mit

$$\sup_{p\,\geq\,0}\,\sup_{x\,\geq\,0} f_p(x) \;\leq\; C\,.$$

b) Falls gleichmäßige Beschränktheit gemäß **a)** vorliegt, bestimmen Sie die Konstante C. Andernfalls bestimmen Sie den Wert von

$$\inf_{p\,\geq\,0}\,\sup_{x\,\geq\,0} f_p(x)\,.$$

c) Zusatzfrage: *What about* $p = 0$? Was fällt Ihnen hier auf?

5. Herr B. geht mit seinem Mischling Bello auf einer geradlinig verlaufenden Straße spazieren. Bello erblickt etwas auf der Wiese nebenan und läuft geradlinig in einem Winkel senkrecht zur Straße davon. 1000 m von Herrn B.'s Standort entfernt befindet sich an der Straße ein Radarmessgerät. Als Bello 1200 m von diesem entfernt ist, blitzt ihn das Radar, und die Messung ergibt, dass sich Bello in diesem Moment mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s von dem Radargerät wegbewegt (d.h. in Richtung vom Radar weg gemessen).

Hat Bello in diesem Moment die gesetzlich zulässige Hundehöchstgeschwindigkeit von 20 km/h *überschritten?*

6. Konvexe Minimierung:

a) Gegeben sei eine mindestens zweimal differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, und es gelte $f(a) = f(b)$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$.
Beweisen Sie die (anschaulich naheliegende) Tatsache:
f besitzt in (a,b) eine eindeutige Minimalstelle.

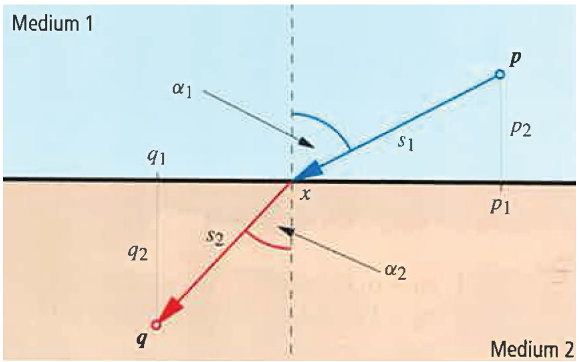
b) Bleibt die Ausage aus **a)** auch dann richtig, wenn $f(a) = f(b)$ nicht vorausgesetzt wird? Falls nein - was muss an den Randpunkten gelten, damit die Aussage richtig bleibt?

7. ($*$) Das *Fermat'sche Prinzip* der Optik besagt, dass Licht stets den Weg kürzester Zeitdauer einschlägt. Wir betrachten den Weg des Lichts zwischen zwei Punkten p und q in zwei Medien (z.B. Luft und Vodka) mit unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten c_1 und c_2. Innerhalb des jeweiligen Mediums bewegt sich das Licht entlang eines geradlinigen Strahls.

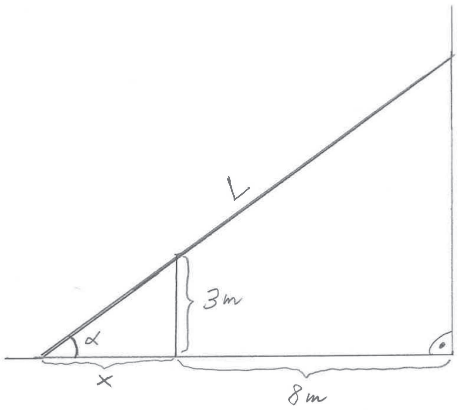
Geben Sie eine Funktion an, die die Dauer von p nach q als Funktion $T(x)$ der Stelle x laut Grafik angibt, und folgern Sie aus der Minimalitätsbedingung $T'(x) = 0$ für den Verlauf des Lichtstrahles das *Snellius'sche Brechungsgesetz*

$$\boxed{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

α_1, α_2 laut Grafik. Medium 1 oben, Medium 2 unten; x ist die waagrechte Koordinate entlang der geradlinigen Grenze zwischen den beiden Medien.



8. Eine 3 m hohe Mauer steht im Abstand von 8 m vor einem Gebäude. Ermitteln Sie die Länge des kürzesten geraden Balkens, der, angelegt am Boden außerhalb der Mauer, die Front des Gebäudes erreicht.



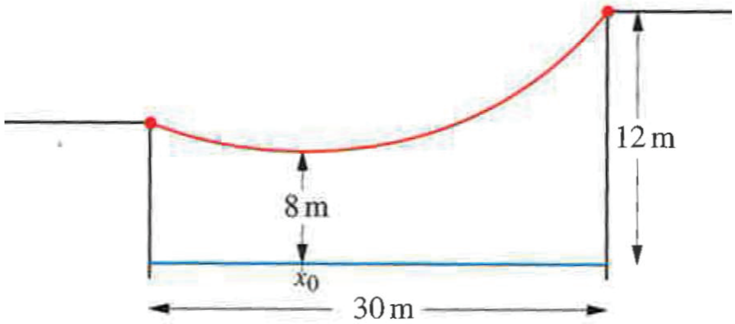
9. ($**$) Über eine 30 m breite Bucht soll eine Hängebrücke gebaut werden.[1] Dabei wird die Form der Brücke durch eine sogenannte *Kettenlinie* beschrieben, d.h. durch eine Funktion der Gestalt

$$\boxed{f(x) = h + a \cdot \left(\cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) - 1\right)}$$

beschrieben. Dabei gilt (alle Längenangaben in m):

[1] Diese Aufgabe ist ohne Computerunterstützung eher mühevoll zu realisieren. Die Bestimmung der Startnäherung (siehe Hinweis unten) ist jedoch problemlos auch per Hand durchführbar.

- x ist die horizontale Ortskoordinate; die Brücke erstreckt sich von $x = 0$ bis $x = 30$.
- Der linke und rechte Aufhängepunkt (bei $x = 0$ bzw. $x = 30$) befindet sich 10 m bzw. 12 m über dem Wasserspiegel.
- Die erwünschte Durchfahrtshöhe ist $h = 8$ m, d.h. Schiffe mit einer Höhe von maximal 8 m sollen unter der Brücke passieren können.



Bestimmen Sie den Parameter a entsprechend der obigen Spezifikation, ebenso den Parameter x_0 (was bedeutet dieser?).

Hinweis: Schreiben Sie zwei Gleichungen für die gesuchten Parameter a und x_0 an, die sich aus der Angabe ergeben. Dieses nichtlineare Gleichungssystem kann man nicht exakt analytisch lösen. Man greift daher zur numerischen Lösung auf das Newton-Verfahren zurück. Wie das Newton-Verfahren in zwei oder mehreren Variablen funktioniert, lernt man in 'Analysis II'. Wir gehen hier anders vor: Führen Sie anstelle der Variablen x_0 die Variable $y := x_0/a$ ein und schreiben Sie eine der beiden Gleichungen als Gleichung in den Variablen a und y an, $\varphi(a, y) = 0$. Diese können Sie formelmäßig exakt nach a auflösen und erhalten somit eine Funktion $a = a(y)$. Einsetzen von $a = a(y)$ in die zweite Gleichung liefert eine Gleichung in der Variable y, die Sie mit dem Newton-Verfahren numerisch lösen können.

Man benötigt nun noch einen brauchbare Startnäherung, die 'optisch' schwer zu schätzen ist. Gehen Sie so vor: Ersetzen Sie die Funktion $g(t) = \cosh t$ durch die Parabel $\tilde{g}(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$; für nicht zu große t haben diese beiden Funktionen einen ähnlichen Verlauf. Das so entstehende Näherungsproblem können Sie mit derselben Substitution wie oben angegeben exakt lösen. Verwenden Sie diese Lösung als Startnäherung für die Newton-Iteration am Rechner.

10. Für bestimmte Integrale, die sich nicht exakt mittels Stammfunktionen berechnen lassen, verwendet man numerische Näherungsformeln. Wir betrachten die einfachste derartige Formel über einem Integrationsintervall $[a, b]$. Der Integrand $f(x)$ wird als stetig differenzierbar vorausgesetzt.

a) Geben Sie für den Fehler $R(f; a, b) - I(f; a, b)$ der *Rechtecksformel*

$$\boxed{R(f;a,b) \;:=\; (b-a)\,f(a) \;\approx\; I(f;a,b) \;:=\; \int_a^b f(x)\,dx}$$

eine formelmäßige Darstellung an, die von $f'(\xi)$ (für ein $\xi \in [a, b]$) abhängt. In welcher Weise hängt der Fehler von der Intervalllänge $b - a$ ab?

Für welche Integranden liefert die Rechteckformel das exakte Ergebnis?

b) Wir denken uns das Intervall $[a, b]$ in n gleich lange Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n$, unterteilt, mit den 'Gitterpunkten'

$$x_0 = a,\; x_1 = a + h,\; \ldots,\; x_{n-1} = b - h,\; x_n = b, \quad (h = 1/n),$$

wenden auf jedem der Teilintervalle die Rechtecksformel $R(f; x_{i-1}, x_i)$ an und summieren auf. Das Ergebnis, die *summierte Rechtecksformel*, eine Riemann-Summe über der gewählten Unterteilung. Wir bezeichnen sie mit $R_{summe}(f; a, b)$.

Geben Sie für den Fehler der summierten Rechtecksformel eine Abschätzung der Form

$$\boxed{\big|R_{summe}(f;a,b) - I(f;a,b)\big| \;\le\; C\,h^p \max_{\xi\,\in\,[a,b]} |f'(\xi)|}$$

an. Wie lautet der Wert für die 'Konvergenzordnung' p, und welche Konstante C tritt in der Abschätzung auf?

1. [Prüfungsaufgaben:] Berechnen Sie die Integrale

a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx}$ **b)** $\boxed{\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx}$ **c)** $\boxed{\displaystyle\int \frac{1-x^2}{x\,(1+x^2)}\,dx}$

2. [Prüfungsaufgaben:] Berechnen Sie die Integrale

a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\,dx}$ **b)** $\boxed{\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx}$ **c)** $\boxed{\displaystyle\int \sqrt{x}\,\cos(\sqrt{x})\,dx}$

3. Berechnen Sie die folgenden parameterabhängigen Integrale. Achten Sie auf Sonderfälle.

a) [Prüfungsaufgabe vom 14.10.2011:]

$$\boxed{\int \frac{x^2-a^2}{x^2+b^2}\,dx} \qquad (a,b\in\mathbb{R})$$

b) [Prüfungsaufgabe vom 11.05.2012:]

$$\boxed{\int x^c \ln x\,dx} \qquad (c\in\mathbb{R})$$

4. a) [Prüfungsaufgabe vom 12.12.2014:] Leiten Sie für ein Integral der Gestalt

$$\boxed{\int \big(f\,g''-f''g\big)\,dx} \qquad \big(f=f(x),\ g=g(x)\big)$$

einen expliziten Formelausdruck her (in Abhängigkeit von f, f', g, g').

b) [Prüfungsaufgabe vom 21.06.2013:] Für eine stetige Funktion f gelte

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,e^{-x}\,dx \;=\; 0}$$

Dann hat f mindestens eine Nullstelle in $[a,b]$.

Ist diese Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort präzise.

c) [Prüfungsaufgabe vom 31.01.2013:] Sei $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige, nichtnegative Funktion, d.h. $f(x)\geq 0$ für alle $x\in[a,b]$. Angenommen es gilt $f(x)>0$ für mindestens ein $x\in[a,b]$.

Dann gilt: $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;>\; 0}$

Ist diese Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort präzise.

5. Sei f integrierbar und bijektiv. Dann besteht zwischen den Stammfunktionen F von f und G von $g:=f^{-1}$ der Zusammenhang $G(x)=x\,g(x)-F(g(x))+C$ (siehe Satz 12.11).

a) Berechnen Sie $\boxed{\displaystyle\int \arctan x\,dx}$

(i) mittels partieller Integration,

(ii) mit Hilfe von Satz 12.11.

b) Sei $g(x)$ die Umkehrfunktion von $f(x) = x\,e^x$. Verwenden Sie Satz 12.11, um $\int g(x)\,dx$ mit Hilfe von $g(x)$ auszudrücken.

Anmerkung: $f(x) = x\,e^x$ ist bijektiv als Funktion $f\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$. (Die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ lässt sich nicht in elementarer Weise darstellen.)

6. a) [Prüfungsaufgabe vom 4.03.2014:] Berechnen Sie die zweite Ableitung $g''(x)$ der Funktion

$$\boxed{g(x) = \int_{\xi=x}^{0} \Big(\int_{\eta=0}^{\xi} f(\eta)\,d\eta \Big)\,d\xi}$$

b) $(*)$

(i) Bestimmen Sie die Stammfunktion F von $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei

$$\boxed{f(x) = x \ (x < 0), \quad f(x) = e^x \ (x \geq 0)}$$

(ii) Sei $a < 0$, $b > 0$. Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ auf zwei Arten: Zunächst durch Aufteilung des Integrationsintervalls $[a,b]$ in zwei Teile links und rechts von 0, und dann mit Hilfe der in (i) ermittelten Stammfunktion.

c) [Prüfungsaufgabe vom 23.05.2014:] Snoopy ist (nur) ein Hund und kann nicht integrieren. Daher sieht er in einer Integraltafel nach und findet die Formel

$$\boxed{\frac{1}{1 + \ln(1 + \sin^2 x)/2}}$$

für ein gesuchtes Integral. Charlie Brown rechnet nach, er rechnet richtig, und erhält das Resultat

$$\boxed{-\frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{2 + \ln(1 + \sin^2 x)}}$$

Er sagt: 'Snoopy, deine Formel ist falsch.' Hat Charlie Brown recht oder nicht?

7. Überprüfen Sie, ob folgende uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie ggf. ihren Wert.

a) $\boxed{\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x-1}}$ **b)** $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}$ **c)** $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx}$

8. a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums (Satz 12.14) die Konvergenz der Reihen

(i) $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}}$ (ii) $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^\alpha}}$

in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Hinweis: (i) ist im Vorlesungsskriptum abgehandelt. Vollziehen Sie das nach und führen Sie (ii) auf (i) zurück, indem Sie das entsprechende Integral geeignet substituieren.

b) Der Beweis des Integralkriteriums beruht darauf, dass die Reihe einer Riemann-Summe für das Integral entspricht. Im Konvergenzfall gilt auch

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \;\leq\; \int_m^{\infty} f(x)\,dx \;\leq\; \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

Geben Sie mit Hilfe dieser beiden Ungleichungen je ein Intervall $[a,b]$ an mit

(i) $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \in [a,b]}$ (ii) $\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2} \in [a,b]}$

9. Die Formel für die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \;=\; \frac{1}{1-x}\,, \qquad x \in (-1,1)$$

entspricht genau der Taylor-Entwicklung der Funktion $1/(1-x)$ um die Stelle $x_0 = 0$.

a) Verwenden Sie diese in Verbindung mit einem geeigneten Satz aus Kapitel 13, um eine analoge Formel für die Reihe

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n\,, \qquad x \in (-1,1)}$$

herzuleiten. [1]

b) Gleiche Frage wie unter **a)**, für

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,x^n\,, \qquad x \in (-1,1)}$$

10. a) Lösen Sie Aufgabe 7d) aus UE 4 mit Hilfe des Satzes von Taylor.

b) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung um die Stelle $x_0 = 0$ für die Funktion

$$\boxed{f(x) \;=\; \int_0^x \frac{\ln(1-\xi)}{\xi}\,d\xi}$$

sowie den zugehörigen Konvergenzradius. Konvergiert die Reihe innerhalb des Konvergenzintervalles gegen $f(x)$?

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Taylorreihe der Funktion $\ln(1-x)$ bezüglich $x_0 = 0$.

---

[1] Die Konvergenz dieser Reihe für $x \in (-1,1)$ ist offensichtlich (Quotientenkriterium bzw. Sazu von Cauchy-Hadamard).