Schriftliche Ausarbeitungen der Übungsaufgaben werden jeweils nach der Übungsstunde auf der Homepage der LVA veröffentlicht. Deren Studium (im nachhinein) ist aber weder ein vollwertiger Ersatz für die eigenständige Auseinandersetzung mit dem Stoff (im vorhinein) noch für den Besuch der Übungsstunde.

Es gibt drei Typen von Aufgaben:

- *'Normale' Aufgaben (ohne (∗)) bzw. Unterpunkte davon haben etwa den Charakter von möglichen Testaufgaben. (D.h., tatsächliche Testaufgaben können ähnlich sein; sie werden in Umfang und Schwierigkeitsgrad an die beim Test zur Verfügung stehende Arbeitszeit angepasst.)*
- *(∗) Aufgaben mit (∗) dienen der Vertiefung und können ggf. auch etwas aufwendiger sein. Auch wenn es sich um keine typischen Testaufgaben handelt, ist die Beschäftigung damit nützlich für das aktive Erarbeiten des Stoffes.*
- *(∗∗) Kommt selten vor. Nicht testrelevant, behandelt stoffliche Erweiterungen, mit ausreichenden Hinweisen für die Lösung. Für Mathe-Freaks.*

Die Verwendung des Computers ist oft sehr hilfreich, und wir nehmen gelegentlich darauf Bezug (nicht testrelevant). Dazu ist es nützlich, dass Sie eine Programmiersprache beherrschen; für den erfolgreichen Abschluss der Übung ist dies natürlich nicht erforderlich.

Bezüglich Tests aus den vergangenen Semestern (mit Lösungen, zum Selbststudium geeignet) sei auf die Homepage dieser Übung verwiesen.

---

1. **a)** Beweisen Sie die Identität (für $\ell \leq n$)

$$\boxed{\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}}$$

indem Sie $\ell \in \mathbb{N}_0$ beliebig (aber fest) wählen und Induktion bezüglich n verwenden. Induktionsanfang ist hier $n = \ell$ (!)

b) [ähnlich zu einer Testaufgabe aus WS 2013/14]
Behauptung:

$$\boxed{\text{Für beliebige } m, n \in \mathbb{N} \text{ ist } (m+1)^n - 1 \text{ ohne Rest durch } m \text{ teilbar.}}$$

Beweisen Sie diese Behauptung

(i) mittels vollständiger Induktion,
(ii) mittels Zurückführung auf eine bekannte Summenformel.

2. [Prüfungsaufgabe, 2014]

a) Schreiben Sie den Ausdruck ($n \in \mathbb{N}$)

$$\boxed{(x_1 - y_1)\, x_2 \cdots x_n + y_1\,(x_2 - y_2)\, x_3 \cdots x_n + \cdots + y_1 \cdots y_{n-2}\,(x_{n-1} - y_{n-1})\, x_n + y_1 \cdots y_{n-1}\,(x_n - y_n)}$$

mit Hilfe des Summen- und des Produktsymbols ($\sum$, $\prod$) an.

b) Die offensichtliche Identität $x_1\, x_2 - y_1\, y_2 = (x_1 - y_1)\, x_2 + y_1(x_2 - y_2)$ verallgemeinert sich wie folgt ($n \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{\text{Für } X_n = x_1 \cdots x_n,\ Y_n = y_1 \cdots y_n \ \text{ gilt } \ X_n - Y_n \ = \ \text{Summe aus } \mathbf{a)}\,.}$$

Führen Sie zum Beweis dieser Formel den Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ durch.

Hinweis: Betrachten Sie $X_{n+1} - Y_{n+1} = X_n\, x_{n+1} - Y_n\, y_{n+1}$. (Hier könnte man die Notation aus der Lösung von **a)** mit $\sum$, $\prod$ verwenden, das ist aber eher nicht zu empfehlen. Bleiben Sie bei der '$\cdots$ - Notation'.)

3. [Prüfungsaufgaben, 2012]

Zwei Varianten des Induktionsprinzips. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

a) *Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen n, und es gelte $A(1)$. Falls man zeigen kann*

$$\forall\, n \geq 2: \quad \exists\, m < n: \quad A(m) \Rightarrow A(n),$$

dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) *Seien $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$ drei Aussagen über natürliche Zahlen n, wobei gelte: $A(n) \Rightarrow B(n)$ und $\neg A(n) \Rightarrow \neg C(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $C(1)$ zutrifft und wenn man zeigen kann dass $B(n-1) \Rightarrow C(n)$ für alle $n > 1$, dann gelten $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

4. Manipulieren mit geometrischen Summen:

a) $(*)$ Schreiben Sie die geometrische Summe $\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k}$ in die Form $\boxed{\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell\, (x-1)^\ell}$ um. Wie lauten die betreffenden Koeffizienten a_ℓ?

Hinweis: 'Binomi' führt auf eine Doppelsumme $-$ diese ist geeignet umzuordnen! Beachten Sie **1 a)**.

b) Setzen Sie $x = 1+\varepsilon$, multiplizieren Sie x^{n+1} aus und vereinfachen Sie die geometrische Summenformel

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}}$$

(Darstellung als Polynom in ε). Was passiert für $\varepsilon = 0$ (d.h. $x = 1$)? Ist das immer noch ein unbestimmter Ausdruck?

5. Die (bekannte) Formel für den Wert der Summe $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad (n \in \mathbb{N})}$ kann man mittels Induktion beweisen, falls man sie bereits kennt. Ein konstruktiver Weg zur Berechnung dieser Summenformel funktioniert wie folgt:

a) Betrachten Sie den Formelausdruck $F(k) = a\, k^3 + b\, k^2 + c\, k + d$ und bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ so dass $F(k+1) - F(k) = k^2$ für beliebige k. *What about d?*

Anmerkung: $F(k)$ nennt man die *unbestimmte Summe* (oder auch *diskrete Stammfunktion*) der Folge der Zahlen $f(k) = k^2$.

b) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n} \big(F(k+1) - F(k)\big)$.

c) $(*)$ Was meinen Sie: Funktioniert diese Methode in analoger Weise zur Berechnung von $\sum_{k=1}^{n} k^p$ ($p \in \mathbb{N}$ beliebig)? Wie berechnet sich die betreffende unbestimmte Summe?

(Sie sollen hier nur das 'Muster' erkennen, ohne streng formal zu argumentieren.)

d) Wie lautet die unbestimmte Summe der geometrischen Folge $f(k) = x^k$ $(k \in N)$? (Dabei ist $x \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl. Achten Sie auf den Sonderfall $x = 1$.)

6. **a)** Seien A und B zwei beliebige Mengen, und für jedes $x \in A$ gelte $x \notin B$, d.h. $\boxed{\forall\, x \in A: \; x \notin B}$

Drücken Sie diese Eigenschaft mit Hilfe von $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, ... (oder was auch immer) aus.

b) Unter der Annahme, dass **a)** gilt: Was folgt dann aus $x \in B$?

c) Wie lautet die logische Umkehrung der Aussage aus **a)**?

d) Gleiche Fragen wie unter **a)** – **c)**, mit $\exists$ anstelle von $\forall$.

7. **a)** Für zwei Mengen A, B bezeichnet $\boxed{A \triangle B}$ die Menge derjenigen Elemente aus A oder B, die nicht in beiden Mengen enthalten sind.

Drücken Sie $A \triangle B$

(i) in der Form $\ldots \setminus \ldots$, (ii) in der Form $\ldots \cup \ldots$

aus.

b) Unter einer *Partition* einer gegebenen Menge A versteht man eine Menge[1] bestehend aus Teilmengen $A_i \subseteq A$, $i \in I$, die *paarweise disjunkt* sind und deren Vereinigung gleich A ist: $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

(Dabei bedeutet 'paarweise disjunkt, dass gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die Indexmenge I könnte z.B. endlich sein, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, oder auch unendlich, z.B. $I = \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{R}$. Zu jedem $i \in I$ gehört genau ein A_i, d.h., die Abbildung $i \mapsto A_i$ definiert die Familie.)

$\rightsquigarrow$ Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Geben Sie eine einfache Partitionierung von $A = \mathbb{N}_0$ an, mit Indexmenge $I = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Stellen Sie die A_i in der Form $\{n \in \mathbb{N}_0 : \ldots\}$ dar (deskriptive Methode), und geben Sie einen Algorithmus (d.h. eine Rechenvorschrift) an, der bestimmt, in welchem der A_i eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ enthalten ist.

8. [ähnlich zu Testaufgaben aus WS 2012/13, 2013/14]

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $\boxed{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad f(n) = \dfrac{n-1}{n+1}}$ **b)** $\boxed{f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x + \dfrac{1}{x}}$

9. Angenommen, A, B und C seien Mengen und $f\colon A \to B$, $g\colon f(A) \subseteq B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Ist $g \circ f$ injektiv, dann muss auch f injektiv sein.

b) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann muss auch g surjektiv sein.

c) Ist $g \circ f$ bijektiv, dann ist g surjektiv und f injektiv.

10. **a)** [Taschenrechner]

Eine Bakterienkultur wächst pro Minute um 10%. Um 3:00 beträgt die Population 1 Milliarde Bakterien. Wie viele sind es um 4:00? Wie viele waren es um 0:00, als die Kultur aufgesetzt wurde?

Kommentieren Sie auch die Tatsache, dass sich bei der Rechnung keine natürlichen Zahlen ergeben, also streng genommen keine 'Anzahl' von Bakterien.

b) Geben Sie für die unter **a)** betrachtete Situation eine allgemeine Formel an: Anzahl der Bakterien = $A(n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der seit 0:00 (Startzeitpunkt) vergangenen *Sekunden* ist. Wie lautet die Formel für $A(n)$?

---

[1] Man spricht dabei auch von der 'Familie' $\{A_i,\ i \in I\}$. Eine Familie ist eine Menge von Mengen o.ä..