**1. a)** Für $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$ und $c < d$ definieren wir die Intervalle

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{Q} : a \le x \le b\}, \quad [c, d] = \{x \in \mathbb{Q} : c \le x \le d\}.$$

Geben Sie zwei möglichst einfache bijektive Abbildungen $f : [a, b] \to [c, d]$ und ihre Umkehrfunktionen $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ an,

(i) mit $f(a) = c,\ f(b) = d$, (ii) mit $f(a) = d,\ f(b) = c$.

**b)** Seien $A$, $B$ endliche gleichmächtige Mengen und $f : A \to B$. Zeigen Sie:

$$\boxed{f \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijektiv}}$$

**c)** Wieviele bijektive Abbildungen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ auf sich selbst gibt es, und wie beweist man das? Beschreiben Sie diese Abbildungen in Worten.

**2.** Gegeben sei die reelle Funktion $\boxed{f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}}$

Dabei bedeutet $\sqrt{x}$ wie üblich die positive Wurzel aus $x \ge 0$.

**a)** Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f$.

**b)** Geben Sie $y \ge 0$ vor und lösen Sie die Gleichung $f(x) = y$ nach $x$ auf. Interpretieren Sie das Ergebnis.

**c)** Überprüfen Sie nochmals Ihr Ergebnis[1] aus **b)** und überlegen Sie, für welche Werte von $y$ der betreffende Wert von $x$ überhaupt wohldefiniert ist (als reelle Zahl). Was folgern Sie daraus?

**3.** [ähnlich zu früheren Testaufgaben]

**a)** Wandeln Sie den periodischen Dezimalbruch $\boxed{0.0740740740740740740740\ldots}$ in rationale Darstellung um.

**b)** Geben Sie die Dezimaldarstellung der rationalen Zahl $\boxed{\dfrac{10}{33}}$ an.

**4. a)** Welche Zahl wird durch die *binäre* Darstellung $0.\overline{1}$ repräsentiert?

**b)** Wandeln Sie die Dezimalzahl 0.1 in Binärdarstellung um.
Hinweis: Division in Binärarithmetik. (Ungewohnt, funktioniert jedoch analog wie in Dezimalarithmetik.)

**c)** Zeigen Sie: Jede endliche Binärzahl besitzt eine endliche Dezimaldarstellung. (Die Umkehrung gilt nicht; siehe **b)**.)

**5.** Welche Folgen $(a_n)$ konvergieren? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert.

**a)** $\boxed{a_n = \dfrac{1 - 5\,n^4}{n^4 + 8\,n^3}}$

**b)** $\boxed{a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\,n - 1}}$

**c)** $\boxed{a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{k-n}}$

**d)** $\boxed{a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{-k}}$

**e)** $\boxed{a_n = \dfrac{2 + n}{2 + n\,(-1)^n}}$

**f)** $\boxed{a_n = \text{Produkt der Folgenelemente aus } \mathbf{d)} \text{ und } \mathbf{e)}}$

**6. a)** Für eine Folge $(a_n)$ reeller Zahlen gelte

$$\boxed{\exists\, K \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \ge K : \ |a_n - a_{n-1}| \le c^n}$$

für eine Konstante $c$, $0 < c < 1$. Zeigen Sie: Die Folge ist konvergent.

[1] Falls Sie unter **b)** bereits sorgfältig und korrekt vorgegangen sind, haben Sie **c)** bereits vorweggenommen.

**b)** Die beiden Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ seien definiert als die beiden Lösungen[2] der quadratischen Gleichung

$$\boxed{x^2 - n\,x + 1 = 0 \quad (n \in \mathbb{N})}$$

Studieren Sie die Konvergenz dieser Folgen sowie die Konvergenz der Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n\, b_n)$.

**7.** Unter dem *Limes superior* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ bzw. dem *Limes inferior* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ einer Folge $(a_n)$ versteht man deren größten bzw. kleinsten Häufungspunkt.

Bestimmen Sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ (falls diese existieren) für die Folgen

**a)** $\boxed{a_n = 1 + (-1)^n + 2^{-n}}$ **b)** $\boxed{a_n = 2^n}$ **c)** Folge aus **5 e)**

*Zusatzfrage:* Wie charakterisiert man Konvergenz einer Folge mittels lim sup und lim inf ?

**8.** [Prüfungsaufgabe, 2012]

Sei $c > 0$ vorgegeben. Durch die Rekursion

$$\boxed{a_1 = c \quad \text{und} \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}\ , \quad n \geq 2}$$

ist eine Folge $(a_n)$ reeller Zahlen definiert.

**a)** Geben Sie alle Zahlen $a \in \mathbb{R}$ an, die als Grenzwert dieser Folge infrage kommen.

*Hinweis:* Für eine konvergente Folge $(a_n)$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$

**b)** Stellen Sie eine Vermutung darüber an, wie die $a_n$ aussehen, und beweisen Sie Ihre Vermutung.

**c)** Entscheiden Sie die Frage nach der Konvergenz in Abhängigkeit von dem Startwert $c$ und geben Sie ggf. den Grenzwert an.

**9.** $(*)$ Wir betrachten zwei rekursiv definierte Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$. Die beiden Folgen sind jedoch nicht unabhängig voneinander: Für gegebene Startwerte $a_1$, $b_1$ sei

$$\boxed{\begin{aligned} a_{n+1} &= c\,\big(a_n + b_n\big)\,, \\ b_{n+1} &= c\,\big(a_n - b_n\big) \end{aligned}}$$

für $n \geq 1$, mit einem festen Parameter $c > 0$. Wir setzen der Einfachheit halber voraus, dass alle auftretenden Folgenglieder $a_n$ und $b_n$ positiv sind.

**a)** Geben Sie − in Abhängigkeit von dem Parameter[3] $c$ − alle möglichen Paare $(a, b)$ and, die als Grenzwert in Frage kommen. D.h.: Falls sowohl $(a_n)$ als auch $(b_n)$ konvergieren, dann kommen für den Grenzwert $(a, b)$ nur bestimmte Werte infrage.

**b)** Geben Sie Wertebereiche für den Parameter $c$ an, so dass beide Folgen entweder sicher konvergieren oder aber mindestens eine von ihnen divergieren muss.

*Hinweis:* Betrachten Sie die Folge $(a_n^2 + b_n^2)$.

**c)** Was passiert im Grenzfall, d.h. für denjenigen Wert von $c$, der den Konvergenzbereich vom Divergenzbereich abgrenzt?

Diese Frage ist zunächst experimentell zu verstehen (Ausprobieren am Rechner). Was beobachten Sie? Genauere Details dann in der Übung.

**10.** [Prüfungsaufgaben, 2012, 2014]

**a)** Sei $(a_n)$ eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen mit positivem Grenzwert $a$.

Beweisen Sie: Die Folge $(1/a_n)$ ist beschränkt.

**b)** Sei $x$ der Grenzwert einer konvergenten Folge und $y$ eine reelle Zahl, die weder mit $x$ noch mit irgendeinem Folgenelement $x_n$ übereinstimmt.

Beweisen Sie: Es existiert eine $\varepsilon$ - Umgebung von $y$, in der sich keines der Folgenglieder $x_n$ befindet.

---

[2] Für $n = 1$ sind die Lösungen nicht reell. Für $n = 2$ hat man eine doppelte Lösung und daher $a_2 = b_2$.

[3] Achtung Sonderfall!