1. a) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es gelte $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie:
Es existiert ein $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ *mit* $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g(x) := f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$.

b) Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Zeigen Sie:
$g(x) := |f(x)|$ *ist ebenfalls stetig auf* $[a,b]$.

2. Die Funktion $f(x)$ sei definiert als $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}}$

a) Wie lautet der Definitionsbereich von f?

b) Geben Sie für $f(x)$ eine explizite Darstellung an und untersuchen Sie die Stetigkeit von f.

c) Gleiche Frage wie unter **a)**, **b)**, für $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}}$

3. a) $(*)$ Sei I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, und (x_n) sei eine Cauchyfolge in I. Zeigen Sie:
$(f(x_n))$ *ist ebenfalls eine Cauchyfolge.*

b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Aussage aus **a)** nicht zutreffen muss, wenn f nur als stetig vorausgesetzt wird.

4. a) Gegeben seien zwei Lipschitz-stetige Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit Lipschitz-Konstante L_f bzw. L_g.

Sind die Funktionen $\boxed{f+g, \quad f \cdot g, \quad f \circ g}$ dann ebenfalls garantiert Lipschitz-stetig, bzw. welche zusätzliche Annahmen werden dafür benötigt? Geben Sie die betreffenden Lipschitz-Konstanten an.

b) Unter **a)** wurde in einem der Fälle eine zusätzliche Annahme benötigt. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Lipschitz-Stetigkeit tatsächlich verletzt sein kann, wenn diese Annahme nicht erfüllt ist.

c) Sei $f\colon [a,b] \to [c,d]$ stetig und bijektiv. Geben Sie eine Bedingung an f an, die sicherstellt, dass $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ Lipschitz-stetig ist.

d) Diskutieren Sie **c)** konkret für den Spezialfall aus UE 2, Aufgabe **1a)**.

e) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Lipschitz-stetig, und (x_n) eine Folge in $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Was können Sie über die Folge $\left(\frac{f(x_n)-f(x^*)}{x_n - x^*}\right)$ aussagen? Wie sieht es mit der Konvergenz aus?

5. Eine physikalische Größe x wird gemessen, wobei ein kleiner Messfehler der maximalen Größe δ unvermeidlich ist, d.h. die Messung liefert einen Wert $\tilde{x}$ mit $|\tilde{x} - x| \le \delta$. Wir fragen nach dem Effekt dieses Messfehlers auf den Funktionswert $f(x)$.

a) f sei als stetig vorausgesetzt (sonst sei über f nichts bekannt). Kann man dann eine explizite Schranke für die maximale Abweichung $|f(\tilde{x}) - f(x)|$ angeben?

b) Welche zusätzliche Information über f wird benötigt, damit eine Schranke für $|f(\tilde{x}) - f(x)|$ angegeben werden kann, und wie lautet diese Schranke?

c) Sei konkret $f(x) = \sqrt{x}$ und $x, \tilde{x} > 0$. Geben Sie die gesuchte Schranke an. Ihr Kommentar dazu?

6. Funktionen können auch *implizit* definiert sein, d.h. als Lösung einer parameterabhängigen Gleichung. Betrachten Sie die Gleichung

$$\frac{y-1}{x+1} = 1 - xy$$

für die Unbekannte y in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$. Durch ihre Lösung ist eine Funktion $y = f(x)$ definiert. Wie lautet diese? Ist sie wohldefiniert und stetig für alle $x \in \mathbb{R}$?

Besonderes Augenmerk auf die Stelle $x = -1$. Was ist $f(-1)$?

7. Geben Sie jeweils einen Wert für den Parameter c an, so dass die Funktion – falls möglich – stetig fortsetzbar ist, und geben Sie den Funktionswert der stetigen Fortsetzung an.

a) $\boxed{f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - c}\,, \quad n \in \mathbb{N}}$ (stetige Fortsezung an $x = c$)

b) $\boxed{f(x) = \dfrac{x^n - 1}{(x - c)^2}\,, \quad n \in \mathbb{N}}$ (stetige Fortsezung an $x = c$)

c) $\boxed{f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - c}{x}}$ (stetige Fortsezung an $x = 0$)

d) (∗) $\boxed{f(x) = \dfrac{(1+x)^{1/3} - (1 + c\,x)}{x^2}}$ (stetige Fortsezung an $x = 0$)

Hinweis: Lemma 1.2.

8. Gegeben sei die quadratische Gleichung $\boxed{x^2 - b\,x + 1 = 0}$

a) Geben Sie die beiden Funktionen $x_1(b)$, $x_2(b)$ an, die den beiden Lösungen entsprechen (dabei sind nur diejenigen Werte von b zu berücksichtigen, für die sich reellwertige Lösungen ergeben).

b) Zeigen Sie: Für jedes $x > 0$ gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}$, so dass x eine Lösung der gegebenen Gleichung ist. Dies definiert eine Funktion $b = f(x)$. Geben Sie diese Funktion f konkret an.[1] Ist f injektiv?

c) Setzen Sie die beiden Funktionen $x_1(b)$, $x_2(b)$ aus **a)** und die Funktion $f(x)$ aus **b)** zueinander in Beziehung.

9. [ähnlich zu Prüfungsaufgaben:]

a) Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Aussage zutrifft.

Sei $f\colon\ [a;b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf dem offenen Intervall (a,b) 'strikt positive Funktion', d.h., $\exists\ \varepsilon > 0$ mit $f(x) \geq \varepsilon$ für alle $x \in (a,b)$. *Dann gilt auch* $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \geq \varepsilon$.

b) Snoopy ist zwar (nur) ein Hund, er interessiert sich aber für Analysis. Charley Brown sagt:

Stell dir eine stetige Funktion f vor mit der Eigenschaft $f(0) = 0$, und eine konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Dann ist ja klar, dass auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ konvergieren muss.

Darauf Snoopy: *Nein, das trifft nicht notwendigerweise zu.* Snoopy hat natürlich wie immer Recht. Warum? Geben Sie ein Beispiel an, das Snoopys Argument zwingend untermauert.

c) Beweisen Sie den **Satz von Snoopy:** Dieser bezieht sich auf die unter **b)** betrachtete Situation, und wir nehmen zusätzlich an, dass gilt:

- Die Reihe $\sum_n a_n$ ist absolut konvergent, sowie
- $\exists\ \varepsilon > 0:\quad f$ ist Lipschitz-stetig auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Dann gilt: $\sum_n f(a_n)$ ist ebenfalls absolut konvergent.

10. (∗) Die Cantor-Funktion (auch *Devil's Staircase* genannt):

Wir definieren eine Folge von Funktionen $f_n\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}\ \ (n \in \mathbb{N}_0)$ rekursiv durch $f_0(x) = x$, sowie

$$\boxed{f_n(x) \;=\; \begin{cases} \tfrac{1}{2}\, f_{n-1}(3\,x), & 0 \leq x < \tfrac{1}{3}, \\ \tfrac{1}{2}, & \tfrac{1}{3} \leq x \leq \tfrac{2}{3}, \\ \tfrac{1}{2}\big(1 + f_{n-1}(3\,x - 2)\big), & \tfrac{2}{3} < x \leq 1. \end{cases}}$$

a) Zeigen Sie: Die Funktionen $f_n(x)$ sind wohldefiniert, und alle Funktionswerte liegen in $[0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Können Sie die Funktionswerte auch noch genauer eingrenzen?

b) Zeigen Sie: Die f_n sind stetig für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

c) (freiwillig:) Schreiben Sie ein Computerprogramm, das für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ den Graphen der Funktion $f_n(x)$ zeichnet.

Anmerkung: Die *Devil's Staircase*–Funktion erhält man für $n \to \infty$. Man kann zeigen, dass der Limes $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in [0,1]$ existiert und dass f stetig ist. Es gilt $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, und f ist für 'fast alle' $x \in [0,1]$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$.

[1] Grafische Darstellung am Rechner ist hier hilfreich für das Verständnis.