Analysis I für TPH, UE (103.088), WS 2014/15 **5. Übungsblatt (1.12.2014)**

1. Bestimmen Sie die reelle Faktorisierung der folgenden Polynome:

a) $\boxed{2\,x^3 - 12\,x^2 + 22\,x - 12}$

b) $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad (n \in \mathbb{N})}$

c) $\boxed{x^4 - (n^2+1)\,x^2 + n^2 \quad (n \in \mathbb{N})}$

d) $\boxed{x^3 - 1}$

e) $\boxed{x^2 - (a+b)\,x + a\,b \quad (a, b \in \mathbb{R})}$

f) $\boxed{x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (a\,b + b\,c + c\,a)\,x - a\,b\,c \quad (a, b \in \mathbb{R})}$

Hinweis: Erraten Sie die Nullstellen.

2. a) Bestimmen Sie – ggf. mit Computerunterstützung – das jeweils eindeutige Interpolationspolynom $p(x)$ vom Maximalgrad 3 zu den Datensätzen $\{(x_i, y_i),\ i = 0 \ldots 3\}$:

(i) $\{\,(0,0),\ (1,0),\ (2,0),\ (3,0)\,\}$
(ii) $\{\,(0,1),\ (1,0),\ (2,0),\ (3,0)\,\}$
(iii) $\{\,(0,0),\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9)\,\}$
(iv) $\{\,(0,-1),\ (1,0),\ (2,1),\ (3,8)\,\}$
(v) $\{\,(0,e^0),\ (1,e^{-1}),\ (2,e^{-2}),\ (3,e^{-3})\,\}$

b) Werten Sie das unter **a)**, (v) berechnete Polynom $p(x)$ an der Stelle $x = 1/2$ am Rechner mittels des Hornerschemas aus, und berechnen Sie den Interpolationsfehler $p(1/2) - e^{-1/2}$.

c) Zeichnen Sie am Rechner grafisch den Verlauf des unter **a)**, (v) berechneten Polynoms $p(x)$ für $x \in [0,5]$, und vergleichen Sie dies mit dem Verlauf der Funktion e^{-x}. Was beobachten Sie?

3. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung (PBZ) folgender rationaler Funktionen:

a) [Testaufgabe, WS 2013/14:] $\boxed{\dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 1}}$

b) [Testaufgabe, WS 2013/14:] $\boxed{\dfrac{1}{1 - x^4}}$

c) [Testaufgabe, WS 2010/11:] $\boxed{\dfrac{x^2 - 5\,x + 4}{x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6}}$

d) $\boxed{\dfrac{1}{x^2 - (c+1)\,x + c} \quad (c \in \mathbb{R})}$

Für welchen Wert von c tritt ein Sonderfall auf? Berücksichtigen Sie diesen separat. Schauen Sie sich auch die PBZ genauer an für den Fall, dass c sehr nahe an diesem Wert liegt. Was fällt Ihnen auf?

4. a) Überlegen Sie sich basierend auf der Definition der Euler'schen Zahl e eine Funktion $f(t)$, für die gilt

$$\boxed{\lim_{t \to 0+} f(t) = e}$$

wobei $f(0)$ nicht direkt auswertbar ist (hebbare Unstetigkeit). Approximieren Sie nun e numerisch, indem Sie $f(t)$ an den Stellen $t = 1/2,\ 1/4,\ 1/6$ durch ein Polynom vom Grad 2 interpolieren und dieses an der Stelle $t = 0$ auswerten. [1]

b) Die unter **a)** berechnete Approximation von e ist nicht sehr genau. Wie könnte man sie verbessern?

c) Alternativ dazu könnte man daran denken, den Wert von $f(t)$ für sehr kleine $t = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}$) als Approximation für $f(0) = e$ zu verwenden. Testen Sie es am Rechner aus aus für $n = 10^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Wie verhält sich der Fehler $f(1/n) - f(0)$ mit wachsendem k? Wie sieht es mit dem Rechenaufwand aus?

5. a) Eine zeitabhängige Größe sei exponentiell wachsend gemäß der Funktion

$$\boxed{f(t) = e^{\lambda t}, \quad t \geq 0}$$

wobei $\lambda > 0$. Sei $t \geq 0$ irgendein Zeitpunkt. Bestimmen Sie Δt so, dass $f(t + \Delta t) = 2\, f(t)$, d.h. nach einem weiteren Zeitintervall Δt hat sich der Funktionswert verdoppelt. Hängt die Lösung Δt von t ab?

b) Gleiche Frage wie unter **a)**, mit $\lambda < 0$ (exponentielles Abklingen) und Halbierung statt Verdoppelung.

c) [Prüfungsaufgabe, 2014:] Für die Strahlungsintensität $I(t)$ einer radioaktiven Substanz gelte [2]

$$\boxed{I(t) = e^{\alpha_1 t}\, I(0) \quad \text{für} \quad t \in [0, t_1]\,.}$$

Für $t > t_1$ verändert sich diese, und es gelte

$$\boxed{I(t) = e^{\alpha_2 (t - t_1)}\, I(t_1) \quad \text{für} \quad t \in [t_1, t_2]\,.}$$

Geben Sie $\beta \in \mathbb{R}$ an, so dass $I(t_2) = e^{\beta t_2}\, I(0)$. Schreiben Sie β in der Form $\beta = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$ mit passenden c_1 und c_2.

d) Sei $\varphi(x)$ eine berechenbare Approximation für e^x auf dem Intervall $[0, \ln 2]$ (z.B. ein Interpolationspolynom). Wie gewinnt man daraus eine Approximation für e^x für beliebige $x \in \mathbb{R}$? Spezifizieren Sie einen entsprechenden Algorithmus.

e) In der Standard-Arithmetik (Gleitpunktarithmetik, *double precision*) auf gängigen Mikroprozessoren kann man (endlich viele) Zahlen im Bereich von etwa $[10^{-300}, 10^{300}]$ darstellen. Geben Sie ein Intervall $[a, b]$ an, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt $e^x \in [10^{-300}, 10^{300}]$.

6. a) Stark wachsende oder fallend Exponentialfunktionen $f(x)$ lassen sich nicht gut direkt grafisch darstellen, weil ihre Werte über viele Größenordnungen variieren. Man wählt daher eine logarithmische Darstellung, d.h. man zeichnet z.B. $\log_{10}(f(x))$.

Sei $\boxed{f(x) = a^x, \quad x \geq 0}$, wobei $a > 0$. Beschreiben Sie genau, wie der Verlauf von $\log_{10}(f(x))$ aussieht. Was ergibt sich speziell für $a = 10^k$ ($k \in \mathbb{Z}$)?

b) Für eine Potenzfunktion $\boxed{f(x) = x^a, \quad x > 0}$, mit $a \in \mathbb{R}$, eignet sich eine *doppelt-logarithmische* Darstellung:

Setze $\xi = \ln x$ und $\eta = \ln(f(x))$. Dann entspricht die Funktion $f(x) = a\,x$ einer Funktion $\eta = g(\xi)$. Geben Sie die Funktion g an.

Angenommen, Sie kennen den Wert von a nicht – wie können Sie diesen aus der doppelt-logarithmischen Darstellung ablesen?

---

[1] Eine derartige Vorgangsweise wird als *Extrapolation* bezeichnet und leistet in vielen Fällen nützliche Dienste für die numerische Approximation unbestimmter Ausdrücke oder nichttrivialer Grenzwerte.

[2] $I(0)$ ist die Strahlungsintensität zum Zeitpunkt $t = 0$.

7. Sei $W(x)$ definiert als die Umkehrfunktion von $f(x) = x\,e^x,\ x \geq 0$. Diese ist nicht in elementarer Weise darstellbar aber wohldefiniert, und wir nehmen sie als neue Funktion in unseren Zoo von Standardfunktionen auf.[3]

a) (i) Zeigen Sie: $W(x)$ ist strikt monoton wachsend für $x \geq 0$.

(ii) Drücken Sie $\ln(W(x))$ mittels $\ln x$ und $W(x)$ aus und bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{W(x)}$.

Hinweis: $x = W(x)\,e^{W(x)}$.

b) (i) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x = e^{-x}$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

(ii) Drücken Sie die eindeutige Lösung der Gleichung $x^2 = e^{-x}$ mit Hilfe von $W(x)$ aus.

8. **a)** Beweisen Sie die Identitäten

$\boxed{\text{(i)}\ \ 2\,\cos^2 x = 1 + \cos(2\,x)}$ $\boxed{\text{(ii)}\ \ 2\,\sin^2 x = 1 - \cos(2\,x)}$

b) Beweisen Sie die Identitäten

$\boxed{\text{(iii)}\ \ 4\,\cos^3 x = 3\,\cos x + \cos(3\,x)}$ $\boxed{\text{(iv)}\ \ 4\,\sin^3 x = 3\,\sin x - \sin(3\,x)}$

9. Zeichnen Sie die folgenden 'modulierten' trigonometrischen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$:

a) $\boxed{\cos x\ \sin(2\,x)}$

b) $\boxed{\sin x\ \sin(2\,x)}$

c) $\boxed{\sin x\ \cos(n\,x)}$ mit $n \in \mathbb{N}$ 'groß'

Anmerkung: Es geht hier nur um die Grafik und den richtigen qualitativen Verlauf. Eine systematische Kurvendiskussion für diese Funktionen führen wir später durch.

10. Jeder Punkt (x, y) auf einem Kreis in der Ebene mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r ist in Polarkoordinaten eindeutig darstellbar als $(x, y) = (r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Spezifizieren Sie eine Funktion

$\boxed{\operatorname{atan2}(y, x)}$

in den zwei Variablen y und x, die zu beliebigen gegebenem (x, y) auf dem Einheitskreis den entsprechenden Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ zurückliefert.

Hinweis: Machen Sie eine Skizze. Die Funktion ist stückweise (per Quadrant) definiert. Verwenden Sie arctan, aber vermeiden Sie Division durch 0, d.h. $x = 0$ ist ein Sonderfall.

Was ist $\operatorname{atan2}(0, 0)$?

---

[3] Viele wichtige Funktionen der mathematischen Physik sind nicht elementar und als Umkehrfunktionen oder über Integrale etc. definiert. Für die rechnerische Praxis besteht kein wesentlicher Unterschied, weil alle diese Funktionen – inklusive der elementaren Funktionnen – am Computer numerisch approximiert werden müssen.