Falls Sie in den Weihnachtsferien Analysis vermissen sollten... bitte sehr: Ausreichend Unterhaltungsmaterial für die Feiertage.

1. Führen Sie für die in UE 5, Aufgabe 9 a) betrachtete Funktion eine komplette Kurvendiskussion durch.

2. a) [Prüfungsaufgabe vom 11.10.2013:] Gegeben sei die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(x) \;=\; \frac{\big(\ln x\big)^2}{x}}$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze. Charakterisieren Sie inbesondere das asymptotische Verhalten für $x \to 0$ und $x \to \infty$.

b) [Prüfungsaufgabe vom 12.12.2014:] Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(x) \;=\; \arctan(x^3)}$$

Führen Sie für diese Funktion eine möglichst komplette Kurvendiskussion durch, plus Skizze.

Hinweis: Die Wendepunkte können Sie jeweils direkt berechnen. Die Bestimmung und Auswertung der 3. Ableitung ist ein bisschen mühevoll; mit Rechnerunterstützung ist das natürlich kein Problem.

3. a) Seien $a, b \geq 0$ und $p \geq 1$ reelle Zahlen. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\boxed{(a+b)^p \;\leq\; 2^{p-1}\,(a^p + b^p)}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion $f(x) = x^p$ konvex ist für $x \geq 0$, und nützen Sie dies aus.

b) ($*$) Für den Spezialfall $p \in \mathbb{N}$ kann man die Ungleichung auch mittels vollständiger Induktion beweisen. (Freiwillige Wiederholung zum Thema vollständige Induktion.)

Man sieht: Der 'analytische' Beweis aus **a)** ist allgemeiner und dabei auch etwas einfacher.

4. Wir betrachten die von einem Parameter $p > 0$ abhängige Familie von Funktionen

$$\boxed{f_p(x) \;=\; x^p\,e^{-x}} \quad \text{für } x \geq 0.$$

a) Klären Sie, ob diese Funktionenfamilie *gleichmäßig (nach oben) beschränkt* ist, d.h. ob eine Konstante C existiert mit

$$\sup_{p\,\geq\,0}\ \sup_{x\,\geq\,0} f_p(x) \;\leq\; C\,.$$

b) Falls gleichmäßige Beschränktheit gemäß **a)** vorliegt, bestimmen Sie die Konstante C.
Andernfalls bestimmen Sie den Wert von

$$\inf_{p\,\geq\,0}\ \sup_{x\,\geq\,0} f_p(x)\,.$$

c) Zusatzfrage: *What about* $p = 0$? Was fällt Ihnen hier auf?

5. Herr B. geht mit seinem Mischling Bello auf einer geradlinig verlaufenden Straße spazieren. Bello erblickt etwas auf der Wiese nebenan und läuft geradlinig in einem Winkel senkrecht zur Straße davon. 1000 m von Herrn B.'s Standort entfernt befindet sich an der Straße ein Radarmessgerät. Als Bello 1200 m von diesem entfernt ist, blitzt ihn das Radar, und die Messung ergibt, dass sich Bello in diesem Moment mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s von dem Radargerät wegbewegt (d.h. in Richtung vom Radar weg gemessen).

Hat Bello in diesem Moment die gesetzlich zulässige Hundehöchstgeschwindigkeit von 20 km/h *überschritten?*

6. Konvexe Minimierung:

a) Gegeben sei eine mindestens zweimal differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, und es gelte $f(a) = f(b)$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$.
Beweisen Sie die (anschaulich naheliegende) Tatsache:
f besitzt in (a,b) eine eindeutige Minimalstelle.

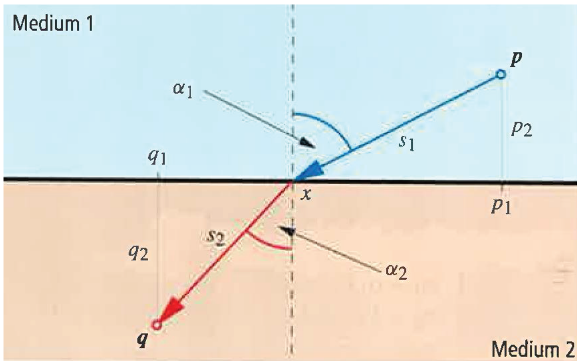
b) Bleibt die Ausage aus **a)** auch dann richtig, wenn $f(a) = f(b)$ nicht vorausgesetzt wird? Falls nein - was muss an den Randpunkten gelten, damit die Aussage richtig bleibt?

7. ($*$) Das *Fermat'sche Prinzip* der Optik besagt, dass Licht stets den Weg kürzester Zeitdauer einschlägt. Wir betrachten den Weg des Lichts zwischen zwei Punkten p und q in zwei Medien (z.B. Luft und Vodka) mit unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten c_1 und c_2. Innerhalb des jeweiligen Mediums bewegt sich das Licht entlang eines geradlinigen Strahls.

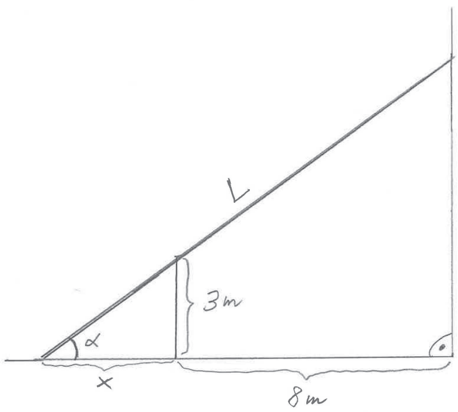
Geben Sie eine Funktion an, die die Dauer von p nach q als Funktion $T(x)$ der Stelle x laut Grafik angibt, und folgern Sie aus der Minimalitätsbedingung $T'(x) = 0$ für den Verlauf des Lichtstrahles das *Snellius'sche Brechungsgesetz*

$$\boxed{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

α_1, α_2 laut Grafik. Medium 1 oben, Medium 2 unten; x ist die waagrechte Koordinate entlang der geradlinigen Grenze zwischen den beiden Medien.



8. Eine 3 m hohe Mauer steht im Abstand von 8 m vor einem Gebäude. Ermitteln Sie die Länge des kürzesten geraden Balkens, der, angelegt am Boden außerhalb der Mauer, die Front des Gebäudes erreicht.



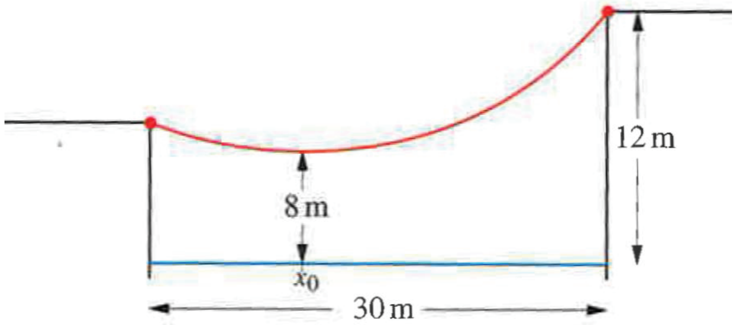
9. ($**$) Über eine 30 m breite Bucht soll eine Hängebrücke gebaut werden.[1] Dabei wird die Form der Brücke durch eine sogenannte *Kettenlinie* beschrieben, d.h. durch eine Funktion der Gestalt

$$\boxed{f(x) = h + a \cdot \Big(\cosh\Big(\frac{x - x_0}{a}\Big) - 1\Big)}$$

beschrieben. Dabei gilt (alle Längenangaben in m):

[1] Diese Aufgabe ist ohne Computerunterstützung eher mühevoll zu realisieren. Die Bestimmung der Startnäherung (siehe Hinweis unten) ist jedoch problemlos auch per Hand durchführbar.

- x ist die horizontale Ortskoordinate; die Brücke erstreckt sich von $x = 0$ bis $x = 30$.
- Der linke und rechte Aufhängepunkt (bei $x = 0$ bzw. $x = 30$) befindet sich 10 m bzw. 12 m über dem Wasserspiegel.
- Die erwünschte Durchfahrtshöhe ist $h = 8$ m, d.h. Schiffe mit einer Höhe von maximal 8 m sollen unter der Brücke passieren können.



Bestimmen Sie den Parameter a entsprechend der obigen Spezifikation, ebenso den Parameter x_0 (was bedeutet dieser?).

Hinweis: Schreiben Sie zwei Gleichungen für die gesuchten Parameter a und x_0 an, die sich aus der Angabe ergeben. Dieses nichtlineare Gleichungssystem kann man nicht exakt analytisch lösen. Man greift daher zur numerischen Lösung auf das Newton-Verfahren zurück. Wie das Newton-Verfahren in zwei oder mehreren Variablen funktioniert, lernt man in 'Analysis II'. Wir gehen hier anders vor: Führen Sie anstelle der Variablen x_0 die Variable $y := x_0/a$ ein und schreiben Sie eine der beiden Gleichungen als Gleichung in den Variablen a und y an, $\varphi(a, y) = 0$. Diese können Sie formelmäßig exakt nach a auflösen und erhalten somit eine Funktion $a = a(y)$. Einsetzen von $a = a(y)$ in die zweite Gleichung liefert eine Gleichung in der Variable y, die Sie mit dem Newton-Verfahren numerisch lösen können.

Man benötigt nun noch einen brauchbare Startnäherung, die 'optisch' schwer zu schätzen ist. Gehen Sie so vor: Ersetzen Sie die Funktion $g(t) = \cosh t$ durch die Parabel $\tilde{g}(t) = 1 + \frac{t^2}{2}$; für nicht zu große t haben diese beiden Funktionen einen ähnlichen Verlauf. Das so entstehende Näherungsproblem können Sie mit derselben Substitution wie oben angegeben exakt lösen. Verwenden Sie diese Lösung als Startnäherung für die Newton-Iteration am Rechner.

10. Für bestimmte Integrale, die sich nicht exakt mittels Stammfunktionen berechnen lassen, verwendet man numerische Näherungsformeln. Wir betrachten die einfachste derartige Formel über einem Integrationsintervall $[a, b]$. Der Integrand $f(x)$ wird als stetig differenzierbar vorausgesetzt.

a) Geben Sie für den Fehler $R(f; a, b) - I(f; a, b)$ der *Rechtecksformel*

$$\boxed{R(f; a, b) \ := \ (b-a)\, f(a) \ \approx \ I(f; a, b) \ := \ \int_a^b f(x)\, dx}$$

eine formelmäßige Darstellung an, die von $f'(\xi)$ (für ein $\xi \in [a, b]$) abhängt. In welcher Weise hängt der Fehler von der Intervalllänge $b - a$ ab?

Für welche Integranden liefert die Rechteckformel das exakte Ergebnis?

b) Wir denken uns das Intervall $[a, b]$ in n gleich lange Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n$, unterteilt, mit den 'Gitterpunkten'

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ \ldots,\ x_{n-1} = b - h,\ x_n = b, \quad (h = 1/n),$$

wenden auf jedem der Teilintervalle die Rechtecksformel $R(f; x_{i-1}, x_i)$ an und summieren auf. Das Ergebnis, die *summierte Rechtecksformel*, eine Riemann-Summe über der gewählten Unterteilung. Wir bezeichnen sie mit $R_{summe}(f; a, b)$.

Geben Sie für den Fehler der summierten Rechtecksformel eine Abschätzung der Form

$$\boxed{\big|R_{summe}(f; a, b) - I(f; a, b)\big| \ \le \ C\, h^p \max_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)|}$$

an. Wie lautet der Wert für die 'Konvergenzordnung' p, und welche Konstante C tritt in der Abschätzung auf?