**1.** [Prüfungsaufgaben:] Berechnen Sie die Integrale

**a)** $\boxed{\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx}$ **b)** $\boxed{\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx}$ **c)** $\boxed{\displaystyle\int \frac{1-x^2}{x\,(1+x^2)}\,dx}$

**2.** [Prüfungsaufgaben:] Berechnen Sie die Integrale

**a)** $\boxed{\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\,dx}$ **b)** $\boxed{\displaystyle\int \ln(1+x^2)\,dx}$ **c)** $\boxed{\displaystyle\int \sqrt{x}\,\cos(\sqrt{x})\,dx}$

**3.** Berechnen Sie die folgenden parameterabhängigen Integrale. Achten Sie auf Sonderfälle.

**a)** [Prüfungsaufgabe vom 14.10.2011:]

$$\boxed{\int \frac{x^2-a^2}{x^2+b^2}\,dx} \qquad (a,b\in\mathbb{R})$$

**b)** [Prüfungsaufgabe vom 11.05.2012:]

$$\boxed{\int x^c\,\ln x\,dx} \qquad (c\in\mathbb{R})$$

**4. a)** [Prüfungsaufgabe vom 12.12.2014:] Leiten Sie für ein Integral der Gestalt

$$\boxed{\int \big(f\,g''-f''g\big)\,dx} \qquad \big(f=f(x),\ g=g(x)\big)$$

einen expliziten Formelausdruck her (in Abhängigkeit von $f, f', g, g'$).

**b)** [Prüfungsaufgabe vom 21.06.2013:] Für eine stetige Funktion $f$ gelte

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,e^{-x}\,dx \;=\; 0}$$

*Dann hat $f$ mindestens eine Nullstelle in $[a,b]$.*

Ist diese Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort präzise.

**c)** [Prüfungsaufgabe vom 31.01.2013:] Sei $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige, nichtnegative Funktion, d.h. $f(x)\geq 0$ für alle $x\in[a,b]$. Angenommen es gilt $f(x)>0$ für mindestens ein $x\in[a,b]$.

*Dann gilt:* $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;>\; 0}$

Ist diese Aussage richtig? Begründen Sie Ihre Antwort präzise.

**5.** Sei $f$ integrierbar und bijektiv. Dann besteht zwischen den Stammfunktionen $F$ von $f$ und $G$ von $g := f^{-1}$ der Zusammenhang $G(x) = x\,g(x) - F(g(x)) + C$ (siehe Satz 12.11).

**a)** Berechnen Sie $\boxed{\displaystyle\int \arctan x\,dx}$

(i) mittels partieller Integration,

(ii) mit Hilfe von Satz 12.11.

**b)** Sei $g(x)$ die Umkehrfunktion von $f(x) = x\,e^x$. Verwenden Sie Satz 12.11, um $\int g(x)\,dx$ mit Hilfe von $g(x)$ auszudrücken.

Anmerkung: $f(x) = x\,e^x$ ist bijektiv als Funktion $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$. (Die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ lässt sich nicht in elementarer Weise darstellen.)

**6. a)** [Prüfungsaufgabe vom 4.03.2014:] Berechnen Sie die zweite Ableitung $g''(x)$ der Funktion

$$\boxed{g(x) = \int_{\xi=x}^{0} \Big( \int_{\eta=0}^{\xi} f(\eta)\,d\eta \Big)\,d\xi}$$

**b)** [Prüfungsaufgabe vom 29.01.2010:]

(i) Bestimmen Sie die Stammfunktion $F$ von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei

$$\boxed{f(x) \;=\; \max\{1, e^x\}}$$

(ii) Sei $a < 0$, $b > 0$. Berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ auf zwei Arten: Zunächst durch Aufteilung des Integrationsintervalls $[a,b]$ in zwei Teile links und rechts von 0, und dann mit Hilfe der in (i) ermittelten Stammfunktion.

**c)** [Prüfungsaufgabe vom 23.05.2014:] Snoopy ist (nur) ein Hund und kann nicht integrieren. Daher sieht er in einer Integraltafel nach und findet die Formel

$$\boxed{\frac{1}{1 + \ln(1 + \sin^2 x)/2}}$$

für ein gesuchtes Integral. Charlie Brown rechnet nach, er rechnet richtig, und erhält das Resultat

$$\boxed{-\frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{2 + \ln(1 + \sin^2 x)}}$$

Er sagt: 'Snoopy, deine Formel ist falsch.' Hat Charlie Brown recht oder nicht?

**7.** Überprüfen Sie, ob folgende uneigentlichen Integrale existieren, und berechnen Sie ggf. ihren Wert.

**a)** $\boxed{\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x-1}}$ **b)** $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}$ **c)** $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx}$

**8. a)** Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums (Satz 12.14) die Konvergenz der Reihen

(i) $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}}$ (ii) $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^\alpha}}$

in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

*Hinweis:* (i) ist im Vorlesungsskriptum abgehandelt. Vollziehen Sie das nach und führen Sie (ii) auf (i) zurück, indem Sie das entsprechende Integral geeignet substituieren.

**b)** Der Beweis des Integralkriteriums beruht darauf, dass die Reihe einer Riemann-Summe für das Integral entspricht. Im Konvergenzfall gilt auch

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \;\le\; \int_m^{\infty} f(x)\,dx \;\le\; \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$$

Geben Sie mit Hilfe dieser beiden Ungleichungen je ein Intervall $[a,b]$ an mit

(i) $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \in [a,b]}$ (ii) $\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^2} \in [a,b]}$

**9.** Die Formel für die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,, \quad x \in (-1,1)$$

entspricht genau der Taylor-Entwicklung der Funktion $1/(1-x)$ um die Stelle $x_0 = 0$.

**a)** Verwenden Sie diese in Verbindung mit einem geeigneten Satz aus Kapitel 13, um eine analoge Formel für die Reihe

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n\,, \quad x \in (-1,1)}$$

herzuleiten.[1]

**b)** Gleiche Frage wie unter **a)**, für

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,x^n\,, \quad x \in (-1,1)}$$

**10. a)** Lösen Sie Aufgabe 7d) aus UE 4 mit Hilfe des Satzes von Taylor.

**b)** Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung um die Stelle $x_0 = 0$ für die Funktion

$$\boxed{f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-\xi)}{\xi}\,d\xi}$$

sowie den zugehörigen Konvergenzradius. Konvergiert die Reihe innerhalb des Konvergenzintervalles gegen $f(x)$?

*Hinweis:* Betrachten Sie zunächst die Taylorreihe der Funktion $\ln(1-x)$ bezüglich $x_0 = 0$.

---

[1] Die Konvergenz dieser Reihe für $x \in (-1,1)$ ist offensichtlich (Quotientenkriterium bzw. Sazu von Cauchy-Hadamard).