Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2015/16

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

Nachtest (FR, 18.03.2016) *(mit Lösung)*

• **Aufgabe 1.**

a) Untersuchen Sie, ob die Funktionenfolge (f_n), mit $\boxed{f_n\colon\ [0,\infty)\to\mathbb{R},\quad f_n(x)=\frac{(1+e^{-x})^n}{2^n}}$ für alle $x\geq 0$ punktweise konvergiert. *a): 1 P.*

Falls dies zutrifft, geben Sie die Grenzfunktion $f\colon\ [0,\infty)\to\mathbb{R}$ explizit an.

- Für $x=0$ ist $f_n(x)\equiv 1$ für alle $n\in\mathbb{N}$
- Für $x>0$ gilt $e^{-x}<1$, und daher

$$f_n(x) \;=\; \Big|\underbrace{\frac{1+e^{-x}}{2}}_{<\,1}\Big|^n \quad\to\; 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

$\Rightarrow$ Die Folge ist punktweise konvergent gegen

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

Anm.: Die Konvergenz kann nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion f nicht stetig ist.

b) Für welche Werte von $x\in\mathbb{R}$ ist die Reihe $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^2)^n}}$ konvergent? (Begründung!) *b): 1 P.*

Geben Sie für den konvergenten Fall auch einen einfachen Formelausdruck für den Wert der Reihe an.

Geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, konvergent für

$$|q| \;=\; \Big|\frac{1}{1-x^2}\Big|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |1-x^2|>1 \quad\Leftrightarrow\quad \left(1-x^2\right)^2=1-2\,x^2+x^4>1$$

$$\Leftrightarrow\quad x^4>2\,x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2>2 \quad\Leftrightarrow\quad |x|>\sqrt{2}$$

Wert der Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^2)^n} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big)^n \;=\; \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x^2}} \;=\; \frac{1-x^2}{-x^2} \;=\; 1-\frac{1}{x^2}$$

c) Sei f eine stetig differenzierbare Funktion und x eine feste Stelle im Inneren des Definitionsbereiches von f. Berechnen Sie den Grenzwert $\boxed{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}}$ *c): 1 P.*

Z.B. mittels ‘de l’Hospital’ (0/0) und Kettenregel (Ableitung nach h bei festem x!):

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} \;&=\; \lim_{h\to 0}\frac{\frac{d}{dh}\big(f(x+h)-f(x-h)\big)}{\frac{d}{dh}(h)} \\
&=\; \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-(-f'(x-h))}{1} \\
&=\; 2\,f'(x)
\end{aligned}$$

(hier wurde die Stetigkeit von f' verwendet).

- **Aufgabe 2.**

a) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to [0,1], \quad f(x) = \cos x}$ ist gegeben durch $\boxed{q(x) = 1 - 4\,\frac{x^2}{\pi^2}}$

Kann man daraus auch eine Approximation der Umkehrfunktion von f konstruieren, und wie lauten die beiden Funktionen $f^{-1}(y)$ und $q^{-1}(y)$? Bitte präzise begründen! *a): 1.5 P.*

Ebenso wie $f(x) = \cos x$ ist die Funktion $q(x) = 1 - 4\,\frac{x^2}{\pi^2}$ auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ strikt monoton fallend, und $q\colon [0,\frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ ist daher bijektiv.

$\rightsquigarrow$ Bestimmung der Umkehrfunktion $q^{-1}(y) \approx f^{-1}(y) = \arccos y$:

Auflösen der Gleichung $q(x) = y$ nach x für $y \in [0,1]$:

$$1 - 4\,\frac{x^2}{\pi^2} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{\pi^2}{4}\,(1-y)$$

mit der nichtnegativen Wurzel

$$x = q^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}\,\sqrt{1-y} \approx f^{-1}(y)$$

b) Eine einfache Approximation der Funktion $\boxed{f(x) = \sin(\pi\,x), \quad x \in [0,1]}$ ist gegeben durch ein Polynom $p(x)$ von möglichst geringem Grad, das an den Stellen $x = 0,\ \frac{1}{2},\ 1$ mit $f(x)$ übereinstimmt. Geben Sie dieses Polynom an. *b): 1.5 P.*

Interpolationsaufgabe: Entweder Lagrange-Darstellung verwenden, oder (einfacher): Ansatz

$$p(x) = a + b\,x + c\,x^2 \qquad \text{(Grad 2)}$$

Die Koeffizienten a, b, c sind durch 3 Forderungen festgelegt:

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) \overset{!}{=} p(0) = a \\ 1 &= f(\tfrac{1}{2}) \overset{!}{=} p(\tfrac{1}{2}) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} \\ 0 &= f(1) \overset{!}{=} p(1) = a + b + c \end{aligned}$$

Lösung:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -b \quad \Rightarrow \quad b = 4,\ c = -4$$

$\Rightarrow$

$$p(x) = 4\,x - 4\,x^2 = 4\,x\,(1-x)$$

- **Aufgabe 3.**

a) Sei $f(x)$ eine zweimal diffenzierbare Funktion. Geben Sie – in Abhängigkeit von f' und f'' – einen expliziten Formelausdruck an für *a): 1 P.*

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2}\, f(\cosh x)}$$

Mit Hilfe von Kettenregel und Produktregel erhält man

$$\frac{d}{dx}\, f(\cosh x) = f'(\cosh x)\sinh x,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\, f(\cosh x) = f''(\cosh x)\sinh^2 x + f'(\cosh x)\cosh x$$

b) Sei f integrierbar mit bekannter Stammfunktion F. Drücken Sie das unbestimmte Integral *b): 1 P.*

$$\boxed{\int (a\,x+b)\, f'(x)\, dx} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

als Formel unter Verwendung von f und F aus.

Einmal partiell integrieren:

$$\int (a\,x+b)\, f'(x)\, dx \;=\; (a\,x+b)\, f(x) - \int a\, f(x) \;=\; (a\,x+b)\, f(x) - a\, F(x) + C$$

c) Berechnen Sie das Integral $\boxed{\displaystyle\int \frac{\big(\ln(2\,x)\big)^n}{x}\, dx \quad (n \in \mathbb{N})}$ *c): 1 P.*

Mit der Substitution $\ln(2\,x) = \ln 2 + \ln x = u,\; dx = x\, du$ ergibt sich

$$\int \frac{(\ln(2\,x))^n}{x}\, dx \;=\; \int u^n\, du \;=\; \frac{u^{n+1}}{n+1} \;=\; \frac{\big(\ln(2\,x)\big)^{n+1}}{n+1} \;+\; C$$