Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2015/16

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (FR, 6.11.2015) / Gruppe 1 (*mit Lösung*)

- **Aufgabe 1.**

a) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{8.81818181\ldots}$ *unter Verwendung einer geometrischen Summe* in einen möglichst einfachen Bruch um. *[a): 1 P.]*

$$\begin{aligned} 8.\overline{81} &= 8 + \frac{81}{100} + \frac{81}{10000} + \ldots \\ &= 8 + \frac{81}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right) = 8 + \frac{81}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n \\ &= 8 + \frac{81}{100}\,\frac{1}{1-1/100} = 8 + \frac{81}{100}\,\frac{100}{99} = 8 + \frac{81}{99} = 8 + \frac{9}{11} = \frac{97}{11} \end{aligned}$$

b) Sei $1 < k < n$ und k gerade. Stellen Sie den Wert des Ausdruckes

$$\boxed{\left(\frac{n}{k}\Big/\frac{k-1}{n-1}\right)\cdot\left(\frac{n-2}{k-2}\Big/\frac{k-3}{n-3}\right)\cdots\left(\frac{n-k+2}{2}\Big/\frac{1}{n-k+1}\right)}$$

in Form eines *Binomialkoeffizienten* dar. *[b): 1 P.]*

$$\begin{aligned} \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\frac{n-3}{k-3}\cdots\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1} &= \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\,\cdot\,(n-k)!}{k!\,\cdot\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

c) Der Wert der Dezimalzahl $\boxed{0.111213141516171819}$ soll in der Form $\boxed{\sum_{k=1}^{9} a_k}$ dargestellt werden, wobei $a_1 = 11/100$, $a_2 = 12/10000$, … .

Geben Sie für die a_k einen Formelausdruck in Abhängigkeit von k an. *[c): 1 P.]*

$$\begin{aligned} 0.111213141516171819 &= 11\cdot 10^{-2} + 12\cdot 10^{-4} + 13\cdot 10^{-6} + \ldots + 19\cdot 10^{-18} \\ &= \sum_{k=1}^{9}\underbrace{(10+k)\,10^{-2k}}_{a_k} \end{aligned}$$

- **Aufgabe 2.**

a) *Geben Sie für den Wert der Summe* $\boxed{\sum_{i=0}^{n} 2^{n-i}\, a^i}$ $(a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ beliebig) einen *möglichst einfachen Formelausdruck* an. *[a): 1 P.]*

Für welchen Wert von a liegt ein Sonderfall vor? Geben Sie auch dafür den Wert der Summe an.

Zurückführen auf geometrische Summe (siehe auch Lemma 1.2):

$$\sum_{i=0}^{n} 2^{n-i}\, a^i = 2^n \sum_{i=0}^{n} 2^{-i}\, a^i = 2^n \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{a}{2}\right)^i = 2^n\, \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{a}{2} - 1} = \frac{a^{n+1} - 2^{n+1}}{a - 2}$$

Sonderfall: $a = 2$: $\sum = (n+1)\, 2^n$.

b) *Geben Sie für den Wert der Summe* $\boxed{\sum_{i=0}^{n} \frac{2^{n-i}}{i!}\, \frac{a^i}{(n-i)!}}$ $(a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ beliebig) einen *möglichst einfachen Formelausdruck* an. *[b): 1 P.]*

'Binomi':
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{2^{n-i}}{i!}\, \frac{a^i}{(n-i)!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\, a^i\, 2^{n-i} = \frac{(a+2)^n}{n!}$$

c) Sei $0 < c \in \mathbb{R}$ gegeben. *Beweisen Sie:* *[c): 1 P.]*

Falls für ein $n = n_0 \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{n\, 2^{-n} < c}$, dann gilt dies auch für alle $n > n_0$.

Für eine ganz präzise Argumentation gibt es ggf. **1 Extra-P.**

Induktionsargument: Der Induktionsanfang ist $n = n_0$, wie angenommen.

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ *:* laut Induktionsvoraussetzung gilt $2^{-n} < c/n$. Daher:

$$(n+1)\, 2^{-(n+1)} = \frac{1}{2}\,(n+1)\, 2^{-n} \overset{\text{IND}}{<} \frac{1}{2}\,(n+1)\, \frac{c}{n} = \frac{n+1}{2\,n}\, c < c \qquad \checkmark$$

weil $n + 1 \leq 2\,n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(Anmerkung: Für jedes $c > 0$ gibt es ein tatsächlich ein solches n_0, weil $n\, 2^{-n}$ gegen 0 strebt für $n \to \infty$; danach war aber hier nicht gefragt.)

- **Aufgabe 3.**

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{Q}\cap(0,1]\to\mathbb{N}$ sei definiert als $\boxed{f(x) := \mathrm{kgV}(p,q) \quad \text{für} \quad x = p/q}$, wobei $p,q\in\mathbb{N}$ mit $p\le q$ und p,q relativ prim (teilerfremd). [1]

Untersuchen Sie diese Funktion (Begründungen angeben):

(i) Ist f injektiv?

(ii) Ist f surjektiv? *[a): 1 P.]*

$f(x) = p\,q$ ist

(i) nicht injektiv: Z.B. ist

$$f(2/3) = f(1/6) = 6$$

(ii) surjektiv: Jedes $n\in\mathbb{N}$ wird als Funktionswert angenommen:

$$f(1/n) = n \quad \text{für alle} \quad n\in\mathbb{N}$$

b) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$ mit $\boxed{a_n = \left(c + \frac{d}{n}\right)^k}$ $(c,d\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}$ beliebig, fest). *[b): 1 P.]*

Für welche Werte c,k konvergiert diese Folge, und wie lautet ihr Grenzwert in Abhängigkeit von c und k? Argumentieren Sie präzise!

Rechnen mit konvergenten Folgen. Die Folge $\{b_n\}$, mit

$$b_n = c + \frac{d}{n}$$

konvergiert gegen c. Weiters gilt

$$a_n = b_n\cdot b_n\,\cdots\,b_n = b_n^k,$$

und daher gilt

$$a_n \to c^k,\ n\to\infty, \quad \text{für alle } c,d,k.$$

c) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$, definiert durch $\boxed{a_n := \text{Summe der Primfaktoren von } n}$, wobei der Faktor 1 und mehrfaches Auftreten eines Primfaktors nicht gezählt wird: *[c): 1 P.]*

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 2,\ a_5 = 5,\ a_6 = 5,\ a_7 = 7,\ \ldots$$

Zeigen Sie: Die Folge $\{a_n\}$ hat unendlich viele verschiedene konvergente Teilfolgen. Geben Sie diese auch an.

Für $n_k = p^k$ (p Primzahl) ist

$$a_{n_k} = p = \text{const., also konvergent gegen } p. \quad \checkmark$$

[1] $\mathrm{kgV}(p,q)$ bezeichnet das kleinste gemeinsame Vielfache von p und q.
Spezieller Wert: $1 = 1/1 \ \ (p = q = 1)$.

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (FR, 6.11.2015) / Gruppe 2 ***(mit Lösung)***

- **Aufgabe 1.**

a) *Geben Sie für den Wert der Summe* $\boxed{\sum_{i=0}^{k} \frac{3^{k-i}}{i!} \, \frac{c^i}{(k-i)!}}$ $(c \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ beliebig) einen *möglichst einfachen Formelausdruck* an. *[a): 1 P.]*

'Binomi':

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{3^{k-i}}{i!} \, \frac{c^i}{(k-i)!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} c^i \, 3^{k-i} = \frac{(c+3)^k}{k!}$$

b) *Geben Sie für den Wert der Summe* $\boxed{\sum_{i=0}^{k} c^i \, 3^{k-i}}$ $(c \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$ beliebig) einen *möglichst einfachen Formelausdruck* an. *[b): 1 P.]*

Für welchen Wert von c liegt ein Sonderfall vor? Geben Sie auch dafür den Wert der Summe an.

Zurückführen auf geometrische Summe (siehe auch Lemma 1.2):

$$\sum_{i=0}^{k} c^i \, 3^{k-i} = 3^k \sum_{i=0}^{k} c^i \, 3^{-i} = 3^k \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{c}{3}\right)^i = 3^k \, \frac{\left(\frac{c}{3}\right)^{k+1} - 1}{\frac{c}{3} - 1} = \frac{c^{k+1} - 3^{k+1}}{c - 3}$$

Sonderfall: $c = 3$: $\sum = (k+1) \, 3^k$.

c) Sei $0 < b \in \mathbb{R}$ gegeben. *Beweisen Sie:* *[c): 1 P.]*

Falls für ein $n = n_0 \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{n < 2^n \, b}$, dann gilt dies auch für alle $n > n_0$.

Für eine ganz präzise Argumentation gibt es ggf. **1 Extra-P.**

Induktionsargument: Der Induktionsanfang ist $n = n_0$, wie angenommen.

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ *:* laut Induktionsvoraussetzung gilt $n < 2^n \, b$. Daher:

$$n + 1 = \frac{n+1}{n} \, n \overset{\text{IND}}{<} \frac{n+1}{n} \, 2^n \, b = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) 2^n \, b \leq 2 \cdot 2^n \, b = 2^{n+1} \, b \qquad \checkmark$$

weil $1 + \frac{1}{n} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(Anmerkung: Für jedes $b > 0$ gibt es ein tatsächlich ein solches n_0, weil $n \, 2^{-n}$ gegen 0 strebt für $n \to \infty$; danach war aber hier nicht gefragt.)

- **Aufgabe 2.**

a) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$ mit $\boxed{a_n = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k\,n}}$ ($k \in \mathbb{N}$ beliebig, fest). *[a): 1 P.]*

Für welche Werte von k konvergiert diese Folge, und wie lautet ihr Grenzwert in Abhängigkeit von k? Argumentieren Sie präzise!

- Für $k = 1$ ist $a_n \equiv 0$, Grenzwert 0.
- Für $k > 1$ ist $0 < 1 - \frac{1}{k} < 1$, daher handelt es sich um eine gegen 0 konvergente geometrische Folge.

Also:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{\left(1 - \tfrac{1}{k}\right)^k}_{<1}\Big)^n = 0 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}.$$

b) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$, definiert durch $\boxed{a_n := \text{Produkt der Primfaktoren von } n}$, wobei der Faktor 1 und mehrfaches Auftreten eines Primfaktors nicht gezählt wird: *[b): 1 P.]*

$$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 2,\ a_5 = 5,\ a_6 = 6,\ a_7 = 7,\ \ldots$$

Zeigen Sie: Die Folge $\{a_n\}$ hat unendlich viele verschiedene konvergente Teilfolgen. Geben Sie diese auch an.

Für $n_k = p^k$ (p Primzahl) ist

$$a_{n_k} = p = \text{const., also konvergent gegen } p. \quad \checkmark$$

c) Die Funktion[1] $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ sei definiert als $\boxed{f(n) := \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$.

Untersuchen Sie diese Funktion (Begründungen angeben):

(i) Ist f injektiv?

(ii) Ist f surjektiv? *[c): 1 P.]*

f ist

(i) injektiv, weil

$$f(n) = \frac{1}{n(n+1)}, \quad \text{und daher} \quad f(n+1) < f(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(Die Funktion ist strikt monoton fallend.)

(ii) nicht surjektiv: Nicht jedes $q \in \mathbb{Q}_+$ wird als Funktionswert angenommen, z.B. $q = 1$.

[1] Notation: $\mathbb{Q}_+ := \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\}$.

- **Aufgabe 3.**

a) Der Wert der Dezimalzahl $\boxed{0.112233445566778899}$ soll in der Form $\boxed{\sum_{k=1}^{9} a_k}$ dargestellt werden, wobei $a_1 = 11/100$, $a_2 = 22/10000$, ...

Geben Sie für die a_k einen Formelausdruck in Abhängigkeit von k an. *[a): 1 P.]*

$$\begin{aligned} 0.112233445566778899 &= 11 \cdot 10^{-2} + 22 \cdot 10^{-4} + 33 \cdot 10^{-6} + \ldots + 99 \cdot 10^{-18} \\ &= \sum_{k=1}^{9} \underbrace{11\,k\,10^{-2k}}_{a_k} \end{aligned}$$

b) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{7.72727272\ldots}$ *unter Verwendung einer geometrischen Summe* in einen möglichst einfachen Bruch um. *[b): 1 P.]*

$$\begin{aligned} 7.\overline{72} &= 7 + \frac{72}{100} + \frac{72}{10000} + \ldots \\ &= 7 + \frac{72}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right) = 7 + \frac{72}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n \\ &= 7 + \frac{72}{100}\,\frac{1}{1-1/100} = 7 + \frac{72}{100}\,\frac{100}{99} = 7 + \frac{72}{99} = 7 + \frac{8}{11} = \frac{85}{11} \end{aligned}$$

c) Sei $1 < k < n$ und k gerade. Stellen Sie den Wert des Ausdruckes

$$\boxed{\frac{n^2-n}{k^2-k} \cdot \frac{(n-2)^2-(n-2)}{(k-2)^2-(k-2)} \cdots \frac{(n-k+2)^2-(n-k+2)}{2^2-2}}$$

in Form eines *Binomialkoeffizienten* dar. *[c): 1 P.]*

$$\begin{aligned} &\frac{n^2-n}{k^2-k} \cdot \frac{(n-2)^2-(n-2)}{(k-2)^2-(k-2)} \cdots \frac{(n-k+2)^2-(n-k+2)}{2^2-2} \\ &= \frac{n\,(n-1)}{k\,(k-1)} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{(k-2)(k-3)} \cdots \frac{(n-k+2)(n-k+1)}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\,\cdot\,(n-k)!}{k!\,\cdot\,(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2015/16

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

1. Übungstest (FR, 6.11.2015) / Gruppe 3 ***(mit Lösung)***

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$, definiert durch $\boxed{a_n := \text{kleinster Primfaktor von } n}$: *[a): 1 P.]*

$$a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 2,\ a_5 = 5,\ a_6 = 2,\ a_7 = 7,\ \ldots$$

Zeigen Sie: Die Folge $\{a_n\}$ hat unendlich viele verschiedene konvergente Teilfolgen. Geben Sie diese auch an.

Für $n_k = p^k$ (p Primzahl) ist

$$a_{n_k} = p = \text{const., also konvergent gegen } p. \quad \checkmark$$

b) Die Funktion[1] $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sei definiert als $\boxed{f(x) := x + \frac{1}{x}}$.

Untersuchen Sie diese Funktion (Begründungen angeben):

(i) Ist f injektiv?

(ii) Ist f surjektiv? *[b): 1 P.]*

f ist

(i) nicht injektiv, weil

$$f(x) = f\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

(ii) nicht surjektiv, weil

$$f(x) > \max\{x, \tfrac{1}{x}\} \geq 1 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}_+ .$$

(Tatsächlich gilt sogar $f(x) \geq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$, da die Gleichung $f(x) = y$, äquivalent zu der quadratischen Gleichung

$$x^2 - y\,x + 1 = 0,$$

für $y < 2$ keine reelle Lösung x besitzt.)

c) Gegeben sei die Folge $\{a_n\}$ mit $\boxed{a_n = \left(k + \frac{1}{n}\right)^k}$ ($k \in \mathbb{N}$ beliebig, fest). *[c): 1 P.]*

Für welche Werte von k konvergiert diese Folge, und wie lautet ihr Grenzwert? in Abhängigkeit von k? Argumentieren Sie präzise!

Rechnen mit konvergenten Folgen. Die Folge $\{b_n\}$, mit

$$b_n = k + \frac{1}{n}$$

konvergiert gegen k. Weiters gilt

$$a_n = b_n \cdot b_n \cdots b_n = b_n^k,$$

und daher gilt

$$a_n \to k^k,\ n \to \infty, \quad \text{für alle } k.$$

[1] Notation: $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\}$.

- **Aufgabe 2.**

a) Sei $1 \le k \le n$. Stellen Sie den Wert des Ausdruckes

$$\boxed{\frac{k\,(k-1)\,(k-2)\,\cdots\,2\cdot 1}{(n-k+1)\,(n-k+2)\,\cdots\,(n-2)\,(n-1)\,n}}$$

mit Hilfe eines *Binomialkoeffizienten* dar. *[a): 1 P.]*

$$\begin{aligned}
&\frac{k\,(k-1)\,(k-2)\,\cdots\,2\cdot 1}{(n-k+1)\,(n-k+2)\,\cdots\,(n-2)\,(n-1)\,n} \\
=\ &\frac{k!}{n\,(n-1)\,(n-2)\,\cdots\,(n-k+2)\,(n-k+1)} \\
=\ &\frac{k!\,(n-k)!}{n\,(n-1)\,(n-2)\,\cdots\,(n-k+2)\,(n-k+1)\,(n-k)!} \\
=\ &\frac{k!\,(n-k)!}{n!} = 1\Big/\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

b) Wandeln Sie die periodische Dezimalzahl $\boxed{3.36363636\ldots}$ *unter Verwendung einer geometrischen Summe* in einen möglichst einfachen Bruch um. *[b): 1 P.]*

$$\begin{aligned}
3.\overline{36} &= 3 + \frac{36}{100} + \frac{36}{10000} + \ldots \\
&= 3 + \frac{36}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right) = 3 + \frac{36}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n \\
&= 3 + \frac{36}{100}\,\frac{1}{1-1/100} = 3 + \frac{36}{100}\,\frac{100}{99} = 3 + \frac{36}{99} = 3 + \frac{4}{11} = \frac{37}{11}
\end{aligned}$$

c) Der Wert der Dezimalzahl $\boxed{0.987654321}$ soll in der Form $\boxed{\sum_{k=1}^{9} a_k}$ dargestellt werden, wobei $a_1 = 9/10$, $a_2 = 8/100$, $\ldots$.

Geben Sie für die a_k einen Formelausdruck in Abhängigkeit von k an. *[c): 1 P.]*

$$\begin{aligned}
0.987654321 &= 9\cdot 10^{-1} + 8\cdot 10^{-2} + 7\cdot 10^{-3} + \ldots + 1\cdot 10^{-9} \\
&= \sum_{k=1}^{9} \underbrace{(10-k)\,10^{-k}}_{a_k}
\end{aligned}$$

• **Aufgabe 3.**

a) Sei $0 < a \in \mathbb{R}$ gegeben. *Beweisen Sie:* *[a): 1 P.]*

Falls für ein $n = n_0 \in \mathbb{N}$ gilt $\boxed{a\,n < 2^n}$, dann gilt dies auch für alle $n > n_0$.

Für eine ganz präzise Argumentation gibt es ggf. **1 Extra-P.**

Induktionsargument: Der Induktionsanfang ist $n = n_0$, wie angenommen.

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$ *:* laut Induktionsvoraussetzung gilt $a\,n < 2^n$. Daher:

$$a\,(n+1) = \frac{n+1}{n}\,a\,n \overset{\text{IND}}{<} \frac{n+1}{n}\,2^n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)2^n \leq 2\cdot 2^n = 2^{n+1} \qquad \checkmark$$

weil $1 + \frac{1}{n} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(Anmerkung: Für jedes $a > 0$ gibt es ein tatsächlich ein solches n_0, weil $n\,2^{-n}$ gegen 0 strebt für $n \to \infty$; danach war aber hier nicht gefragt.)

b) *Geben Sie für den Wert der Summe* $\boxed{\sum_{j=0}^{n} 2^j\, c^{n-j}}$ ($c \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ beliebig) einen *möglichst einfachen Formelausdruck* an. *[b): 1 P.]*

Für welchen Wert von c liegt ein Sonderfall vor? Geben Sie auch dafür den Wert der Summe an.

Zurückführen auf geometrische Summe (siehe auch Lemma 1.2):

$$\sum_{j=0}^{n} 2^j\, c^{n-j} = c^n \sum_{j=0}^{n} 2^j\, c^{-j} = c^n \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{2}{c}\right)^j = c^n\, \frac{\left(\frac{2}{c}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{c} - 1} = \frac{2^{n+1} - c^{n+1}}{2-c}$$

Sonderfall: $c = 2$: $\sum = (n+1)\,2^n$.

c) *Geben Sie für den Wert der Summe* $\boxed{\sum_{j=0}^{n} \frac{2^j}{(n-j)!}\,\frac{c^{n-j}}{j!}}$ ($c \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ beliebig) einen *möglichst einfachen Formelausdruck* an. *[c): 1 P.]*

'Binomi':

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{2^j}{(n-j)!}\,\frac{c^{n-j}}{j!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j\, c^{n-j} = \frac{(2+c)^n}{n!}$$