Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2015/16

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (FR, 8.01.2016) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Sei $k \in \mathbb{N}$ ein fester Wert. Entscheiden Sie, ob die Reihe $\boxed{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}}}$ konvergiert. *a): 1 P.*

Der n-te Summand lautet

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}} = \frac{\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}}{\dfrac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-k-1)!}} = \frac{n!\,(k+1)!\,(n-k)!}{(n+1)!\,k!\,(n-k)!} = \frac{k+1}{n+1}$$

$\Rightarrow$ Die Reihe divergiert (Verhalten gleich wie bei harmonischer Reihe).

b) Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung von $\boxed{\dfrac{1}{x+x^3}}$ *b): 1 P.*

Der Nenner lautet $x\,(1+x^2)$, wobei $1+x^2$ irreduzibel über $\mathbb{R}$ (keine reelle Nullstelle).

$\rightsquigarrow$ Ansatz:

$$\frac{1}{x+x^3} = \frac{1}{x\,(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B\,x + C}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A\,(1+x^2) + x\,(B\,x + C) = A + C\,x + (A+B)\,x^2$$

$$\Rightarrow \quad A = 1, \quad C = 0, \quad A + B = 0, \quad \text{daher} \quad B = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x+x^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

c) Bestimmen Sie den Wert der konvergenten Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+n^2}}}$ *c): 1 P.*

Teleskopreihe:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+n^2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots \; = \; 1
\end{aligned}$$

- **Aufgabe 2.**

a) Die Funktion $\boxed{f\colon (0,\infty)\to(0,\infty),\quad f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}}$ ist bijektiv. Verifizieren Sie dies, indem Sie ihre Umkehrfunktion berechnen. *a): 1 P.*

Sei $y>0$ gegeben. Wir bestimmen $x>0$ mit $f(x)=y$:

$$f(x)=y \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{x\,(1+x)}=y \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x-\frac{1}{y}=0$$

Lösung dieser quadratische Gleichung:

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\Big(-1\pm\sqrt{1+\frac{4}{y}}\Big)$$

Die eindeutige positive Lösung ($x_1>0$) ergibt die Umkehrfunktion von f:

$$f^{-1}(y)=\frac{1}{2}\Big(-1+\sqrt{1+\frac{4}{y}}\Big)>0 \quad \text{für} \quad y>0$$

b) Überprüfen Sie, ob die Funktion $\boxed{f\colon (0,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}}$ injektiv ist. *b): 1 P.*

(Vgl. Aufgabe **1 b)**, bzw. auf gleichen Nenner bringen):

$$f(x)=\frac{1}{x+x^3}$$

$x+x^3$ ist für $x>0$ positiv und strikt monoton wachsend.

Daher ist $f(x)$ für $x>0$ strikt monoton fallend und somit injektiv.

Anmerkung: $f\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$ ist bijektiv, aber ihre Umkehrfunktion ist nicht so einfach zu bestimmen, da eine kubische Gleichung zu lösen ist. Für $y>0$ ist

$$f^{-1}(y)=\frac{g(y)}{6\,y}-\frac{2\,y}{g(y)}, \quad \text{mit} \quad g(y)=\sqrt[3]{\big(12\sqrt{3}\sqrt{4\,y^2+27}+108\big)y^2}$$

c) Weisen Sie nach, dass die kubische Gleichung $\boxed{p(x)=1,\quad \text{mit } p(x)=x^3-x^2}$ mindestens eine Lösung $x\in(1,2)$ hat. *c): 1 P.*

Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Gleichung zu lösen.

Für den präzisen Nachweis, dass dies die einzige Lösung in $(1,2)$ ist, gibt es **1 Extra-P.**

$p(x)=x^3-x^2$ ist stetig, mit

$$p(1)=0 \quad \text{und} \quad p(2)=4$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es ein $x\in(1,2)$ gibt mit $p(x)=1$. ✓

- Eindeutigkeit: Es gilt

$$p(x)=x^2\,(x-1)$$

x^2 und $x-1$ sind beide auf $(1,2)$ positiv und strikt monoton wachsend. Daher ist dort auch $p(x)$ strikt monoton wachsend und somit injektiv, woraus die Eindeutigkeit folgt. ✓

- **Aufgabe 3.**

a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\boxed{\lim_{x\to\infty}\big(\ln(x-1) - 2\ln x + \ln(x+1)\big)}$

Begründen Sie Ihre Antwort präzise. *a): 1 P.*

$$\begin{aligned}
\ln(x-1) - 2\ln x + \ln(x+1) &= \ln(x-1) + \ln(x+1) - \ln(x^2) \\
&= \ln((x-1)(x+1)) - \ln(x^2) \\
&= \ln(x^2-1) - \ln(x^2) \\
&= \ln\frac{x^2-1}{x^2} = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \to 0 \quad \text{für} \quad x\to\infty
\end{aligned}$$

weil $1 - 1/x^2 \to 1$ für $x \to \infty$ und ln stetig an der Stelle 1, mit $\ln 1 = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\boxed{\cos(2\arcsin(x))}$ für $x \in [-1,1]$ mit einem Polynom $p(x)$ übereinstimmt, und geben Sie das Polynom $p(x)$ an. *b): 1 P.*

Verwende Additionstheorem für cos:

$$\begin{aligned}
\cos(2\arcsin(x)) &= \cos^2(\arcsin(x)) - \sin^2(\arcsin(x)) \\
&= (1 - \sin^2(\arcsin(x))) - \sin^2(\arcsin(x)) = (1-x^2) - x^2 \\
&= 1 - 2x^2 = p(x), \quad x \in [-1,1]
\end{aligned}$$

c) Die Gleichung $\boxed{x^2 - 3x + 2 = 0}$ hat offenbar die Lösung $x_1 = 1$. Berechnen Sie die zweite Lösung x_2, aber ohne Verwendung der Lösungsformel für die quadratische Gleichung. ‘Erraten durch Hinsehen’ wird auch nicht als Lösung anerkannt!

Hinweis: ’/’ *c): 1 P.*

Verwende Polynomdivision:

```
    x^2 - 3 x + 2  /  x - 1  =  x - 2
 -  x^2 -   x
    -------------
        - 2 x + 2
 -      - 2 x + 2
        ---------
                0
```

Also: Division durch $x-1$ ergibt den Quotienten $x-2$ mit Rest 0. Daher ist $x_2 = 2$.

Institut für Analysis und Scientific Computing
W. Auzinger

TU Wien
WS 2015/16

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (FR, 8.01.2016) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Weisen Sie nach, dass die kubische Gleichung $\boxed{x^3 = 1 + x}$ mindestens eine Lösung $x \in (1,2)$ hat. *a): 1 P.*

Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Gleichung zu lösen.

Für den präzisen Nachweis, dass dies die <u>einzige</u> Lösung in $(1,2)$ ist, gibt es **1 Extra-P.**

Die Funktion $f(x) = x^3 - x$ ist stetig, mit

$$f(1) = 0 \quad \text{und} \quad f(2) = 6$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es ein $x \in (1,2)$ gibt mit $f(x) = 1$. ✓

- Eindeutigkeit: Es gilt

$$f(x) = x\,(x^2 - 1)$$

x und $x^2 - 1$ sind beide auf $(1,2)$ positiv und strikt monoton wachsend. Daher ist dort auch $f(x)$ strikt monoton wachsend und somit injektiv, woraus die Eindeutigkeit folgt. ✓

b) Die Funktion $\boxed{f\colon\ (0,\infty) \to (0,\infty), \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}}$ ist bijektiv. Verifizieren Sie dies, indem Sie ihre Umkehrfunktion berechnen. *b): 1 P.*

Sei $y > 0$ gegeben. Wir bestimmen $x > 0$ mit $f(x) = y$:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x\,(x+2)} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2\,x - \frac{2}{y} = 0$$

Lösung dieser quadratische Gleichung:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-2 \pm \sqrt{4 + \frac{8}{y}} \right) = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{2}{y}}$$

Die eindeutige positive Lösung $(x_1 > 0)$ ergibt die Umkehrfunktion von f:

$$f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{y}} > 0 \quad \text{für} \quad y > 0$$

c) Überprüfen Sie, ob die Funktion $\boxed{f\colon\ (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}}$ injektiv ist. *c): 1 P.*

Auf gleichen Nenner bringen:

$$f(x) = \frac{1}{x + x^2}$$

$x + x^2$ ist für $x > 0$ positiv und strikt monoton wachsend.

Daher ist $f(x)$ für $x > 0$ strikt monoton fallend und somit injektiv.

- **Aufgabe 2.**

a) Die Gleichung $\boxed{x^2 - 5\,x + 6 \;=\; 0}$ hat die Lösung $x_1 = 2$. Berechnen Sie die zweite Lösung x_2, aber ohne Verwendung der Lösungsformel für die quadratische Gleichung. 'Erraten durch Hinsehen' wird auch nicht als Lösung anerkannt!

Hinweis: ' / '

a): 1 P.

Verwende Polynomdivision:

```
     x^2 - 5 x + 6   /  x - 2  =  x - 3
-    x^2 - 2 x
     -------------
         - 3 x + 6
-        - 3 x + 6
         ---------
                 0
```

Also: Division durch $x - 2$ ergibt den Quotienten $x - 3$ und den Rest 0. Daher ist $x_2 = 3$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \left(\ln(x-1) + 2\,\ln\tfrac{1}{x} + \ln(x+1) \right)}$

Begründen Sie Ihre Antwort präzise.

b): 1 P.

$$
\begin{aligned}
\ln(x-1) + 2\,\ln\tfrac{1}{x} + \ln(x+1) &= \ln(x-1) - 2\,\ln x + \ln(x+1) \\
&= \ln(x-1) + \ln(x+1) - \ln(x^2) \\
&= \ln((x-1)(x+1)) - \ln(x^2) \\
&= \ln(x^2-1) - \ln(x^2) \\
&= \ln\frac{x^2-1}{x^2} = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty
\end{aligned}
$$

weil $1 - 1/x^2 \to 1$ für $x \to \infty$ und ln stetig an der Stelle 1, mit $\ln 1 = 0$.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $\boxed{\cos(2\arccos(x))}$ für $x \in [-1, 1]$ mit einem Polynom $p(x)$ übereinstimmt, und geben Sie das Polynom $p(x)$ an.

c): 1 P.

Verwende Additionstheorem für cos :

$$
\begin{aligned}
\cos(2\arccos(x)) &= \cos^2(\arccos(x)) - \sin^2(\arccos(x)) \\
&= \cos^2(\arccos(x)) - (1 - \cos^2(\arccos(x))) \\
&= 2\,x^2 - 1 \;=\; p(x), \quad x \in [-1, 1]
\end{aligned}
$$

- **Aufgabe 3.**

a) Bestimmen Sie den Wert der konvergenten Reihe $\boxed{\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}}$ *a): 1 P.*

Teleskopreihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right) = \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\right) + \left(\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 4}\right) + \ldots = \frac{1}{\ln 2}$$

b) Sei $k \in \mathbb{N}$ ein fester Wert. Entscheiden Sie, ob die Reihe $\boxed{\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}}$ konvergiert. *b): 1 P.*

Der n-te Summand lautet

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!}}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \frac{(n-1)!\,k!\,(n-k)!}{n!\,(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{k}{n}$$

$\Rightarrow$ Die Reihe divergiert (Verhalten gleich wie bei harmonischer Reihe).

c) Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung von $\boxed{\dfrac{1}{1+x+x^2} \quad \text{und} \quad \dfrac{x}{1+x+x^2}}$ *c): 1 P.*

Der Nenner ist irreduzibel über $\mathbb{R}$, d.h., er hat keine reelle Nullstelle.

$\Rightarrow$ Die reelle PBZ stimmt mit in beiden Fällen mit der gegebenen Gestalt überein,

$$\frac{1}{1+x+x^2}, \quad \frac{x}{1+x+x^2}$$

ANALYSIS I FÜR TPH, UE (103.088)

2. Übungstest (FR, 8.01.2016) *(mit Lösung)*

- **Aufgabe 1.**

a) Geben Sie eine möglichst einfache Umformung für den Ausdruck $\boxed{3\,\ln(x^3) - 2\,\ln(x^2) + 4\,\ln(\frac{1}{x})}$ an $(x > 0)$.

a): 1 P.

$$3\,\ln(x^3) - 2\,\ln(x^2) + 4\,\ln(\tfrac{1}{x}) \;=\; 9\,\ln x - 4\,\ln x - 4\,\ln x \;=\; \ln x$$

b) Geben Sie eine möglichst einfache Umformung für den Ausdruck $\boxed{\cos\big(\arcsin(x) + \arccos(x)\big)}$ für $x \in [-1, 1]$ an.

b): 1 P.

Verwende Additionstheorem für cos:

$$\begin{aligned}\cos\big(\arcsin(x) + \arccos(x)\big) &= \cos\arcsin(x)\ \cos\arccos(x) - \sin\arcsin(x)\ \sin\arccos(x)\\ &= \sqrt{1 - \sin^2\arcsin(x)}\cdot x - x \cdot \sqrt{1 - \cos^2\arccos(x)}\\ &= \sqrt{1 - x^2}\cdot x - x\cdot\sqrt{1 - x^2} = 0, \quad x \in [-1, 1]\end{aligned}$$

c) Die Gleichung $\boxed{x^2 - 4\,x + 3 \;=\; 0}$ hat die Lösung $x_1 = 1$. Berechnen Sie die zweite Lösung x_2, aber ohne Verwendung der Lösungsformel für die quadratische Gleichung. ‘Erraten durch Hinsehen’ wird auch nicht als Lösung anerkannt!

Hinweis: ’/’

c): 1 P.

Verwende Polynomdivision:

```
      x^2 - 4 x + 3  /  x - 1  =  x - 3
   -  x^2 -   x
      -------------
          - 3 x + 3
   -      - 3 x + 3
          ---------
                  0
```

Also: Division durch $x - 1$ ergibt den Quotienten $x - 3$ und den Rest 0, Daher ist $x_2 = 3$.

• **Aufgabe 2.**

a) Sei $k \in \mathbb{N}$ ein fester Wert. Entscheiden Sie, ob die Reihe $\boxed{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\binom{n}{k-1}}{\binom{n+1}{k}}}$ konvergiert. *a): 1 P.*

Der n-te Summand lautet

$$\frac{\binom{n}{k-1}}{\binom{n+1}{k}} = \frac{\dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!}}{\dfrac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}} = \frac{n!\,k!\,(n+1-k)!}{(n+1)!\,(k-1)!\,(n+1-k)!} = \frac{k}{n+1}$$

$\Rightarrow$ Die Reihe divergiert (Verhalten gleich wie bei harmonischer Reihe).

b) Für welche Werte von $c > 0$ konvergiert die Reihe $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n\,(c-1)}{c^{2\,n+1}}}$?

Geben Sie für die konvergenten Fälle ihren Wert an. *b): 1 P.*

Für $c = 1$ ist der Summand $\equiv 0$. Ansonsten Teleskopreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n\,(c-1)}{c^{2\,n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{n+1} - c^n}{c^n\,c^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^n} - \frac{1}{c^{n+1}}\right) = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c^2}\right) + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^3}\right) + \ldots$$

Damit die Reihe konvergiert, muss $\{1/c^n\}$ eine Nullfolge sein, es muss also $c > 1$ gelten.

$\Rightarrow$ Die Reihe konvergiert gegen $1/c$ für $c > 1$ und ist divergent für $c < 1$.

c) Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung von $\boxed{\dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2}{x-1}}}$ *c): 1 P.*

Zunächst auf Standardgestalt umformen:

$$\frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{x-1}} = \frac{x-1}{x^2 + x - 1}$$

Der Nenner $x^2 + x - 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{R}$ (keine reelle Nullstelle).

$\Rightarrow$ Die reelle PBZ stimmt mit der gegebenen Gestalt über überein,

$$\frac{A\,x + B}{x^2 + x - 1} = \frac{x-1}{x^2 + x - 1}$$

- **Aufgabe 3.**

a) Die Funktion $\boxed{f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \frac{1}{x}}$ ist bijektiv. Verifizieren Sie dies, indem Sie ihre Umkehrfunktion berechnen. *a): 1 P.*

Sei $y \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir bestimmen $x > 0$ mit $f(x) = y$:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y\,x - 1 \;=\; 0$$

Lösung dieser quadratische Gleichung:

$$x_{1,2} \;=\; \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2 + 4}\right) \;=\; \frac{y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1}$$

Die eindeutige positive Lösung ($x_1 > 0$) ergibt die Umkehrfunktion von f:

$$f^{-1}(y) \;=\; \frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1} > 0 \quad \text{für} \quad y > 0$$

b) Überprüfen Sie, ob die Funktion $\boxed{f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}}$ injektiv ist. *b): 1 P.*

Auf gleichen Nenner bringen:

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x^2\,(1 + x^2)}$$

$x^2\,(1 + x^2) = x^2 + x^4$ ist für $x > 0$ positiv und strikt monoton wachsend.

Daher ist $f(x)$ für $x > 0$ strikt monoton fallend und somit injektiv.

c) Weisen Sie nach, dass die kubische Gleichung $\boxed{p(x) = 5, \quad \text{mit } p(x) = x^3 + x^2 - x}$ mindestens eine Lösung $x \in (1, 2)$ hat. *c): 1 P.*

Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Gleichung zu lösen.

Für den präzisen Nachweis, dass dies die <u>einzige</u> Lösung in $(1, 2)$ ist, gibt es **1 Extra-P.**

$p(x) = x^3 + x^2 - x$ ist stetig, mit

$$p(1) = 1 \quad \text{und} \quad p(2) = 10$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es ein $x \in (1, 2)$ gibt mit $p(x) = 5$. ✓

- Eindeutigkeit: Es gilt

$$p(x) = x\,(x^2 + x - 1)$$

x und $x^2 + x - 1$ sind beide auf $(1, 2)$ positiv und strikt monoton wachsend. Daher ist dort auch $p(x)$ strikt monoton wachsend und somit injektiv, woraus die Eindeutigkeit folgt. ✓