Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

a) Beweisen Sie die Identität (für $\ell \le n$)

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

indem Sie $\ell \in \mathbb{N}_0$ beliebig (aber fest) wählen und Induktion bezüglich n verwenden.

Zu beachten: Induktionsanfang ist hier $n = \ell$.

b) Behauptung:

Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ ist $(m+1)^n - 1$ ohne Rest durch m teilbar.

Beweisen Sie diese Behauptung

(i) mittels vollständiger Induktion,

(ii) mittels Zurückführung auf eine bekannte Summenformel.

[zur Übersicht]

a) Schreiben Sie den Ausdruck ($n \in \mathbb{N}$)

$$(x_1 - y_1)\, x_2 \cdots x_n + y_1\, (x_2 - y_2)\, x_3 \cdots x_n + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1}\, (x_n - y_n)$$

mit Hilfe des Summen- und des Produktsymbols ($\sum$, $\prod$) an.

b) Die offensichtliche Identität $x_1\, x_2 - y_1\, y_2 = (x_1 - y_1)\, x_2 + y_1(x_2 - y_2)$ verallgemeinert sich wie folgt ($n \in \mathbb{N}$):

Für $X_n = x_1 \, \cdots \, x_n, \; Y_n = y_1 \, \cdots \, y_n$ gilt $X_n - Y_n =$ Summe aus **a)**.

Führen Sie zum Beweis dieser Formel den Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ durch.

Zwei Varianten des Induktionsprinzips. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

a) *Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen n, und es gelte $A(1)$. Falls man zeigen kann*

$$\forall\, n \geq 2 : \quad \exists\, m \in \{1, 2, \ldots, n-1\} : \quad A(m) \Rightarrow A(n),$$

dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) *Seien $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$ drei Aussagen über natürliche Zahlen n, wobei gelte*

$$A(n) \Rightarrow B(n) \quad \text{und} \quad \neg A(n) \Rightarrow \neg C(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Falls $C(1)$ zutrifft und falls man zeigen kann dass $B(n-1) \Rightarrow C(n)$ für alle $n > 1$, dann gilt $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) $(*)$ Schreiben Sie die geom. Summe $\sum_{k=0}^{n} x^k$ in die Form $\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \,(x-1)^\ell$ um. Wie lauten die betreffenden Koeffizienten a_ℓ ?

Anmerkung: Hier tritt eine *Doppelsumme* auf, die geeignet umzuordnen ist. Beachten Sie auch Aufgabe **1a)**.

b) Setzen Sie $x = 1 + \varepsilon$, multiplizieren Sie x^{n+1} aus und vereinfachen Sie die geometrische Summenformel $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (Darstellung als Polynom in ε). Was passiert für $\varepsilon = 0$ (d.h. $x = 1$) ? Ist das immer noch ein unbestimmter Ausdruck?

Die (bekannte) Formel für den Wert der Summe $\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad (n \in \mathbb{N})$ kann man mittels Induktion beweisen, falls man sie bereits kennt. Eine *konstruktive* Methode zur Berechnung dieser Summenformel funktioniert wie folgt:

a) Betrachten Sie den Formelausdruck $F(k) = a\,k^3 + b\,k^2 + c\,k + d$ und bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ so dass $F(k+1) - F(k) = k^2$ für beliebige k gilt. *What about d ?*

Anmerkung: $F(k)$ nennt man die *unbestimmte Summe* (oder auch *diskrete Stammfunktion*) der Folge der Zahlen $f(k) = k^2$.[1]

b) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n} \big(F(k+1) - F(k)\big)$.

c) $(*)$ Funktioniert diese Methode auch zur Berechnung von $\sum_{k=1}^{n} k^p \quad (p \in \mathbb{N}$ beliebig$)$? Wie berechnet sich die betreffende unbestimmte Summe?

(Sie sollen hier nur das ‘Muster’ erkennen, ohne streng formal zu argumentieren.)

d) Wie lautet die unbestimmte Summe der geometrischen Folge $f(k) = x^k \ (k \in N)$? (Dabei ist $x \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl.)

---

[1] Es besteht eine enge Analogie zur Integralrechnung – vgl. die Begriffe ‘unbestimmtes Integral’, ‘Stammfunktion’.

a) Seien A und B zwei beliebige Mengen, und für jedes $x \in A$ gelte $x \notin B$, d.h. $\forall\, x \in A :\ x \notin B$.

Drücken Sie diese Eigenschaft mit Hilfe von $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, ... (oder was auch immer) aus.

b) Unter der Annahme, dass **a)** gilt: Was folgt dann aus $x \in B$?

c) Wie lautet die logische Umkehrung der Aussage aus **a)** ?

d) Gleiche Fragen wie unter **a)** – **c)**, mit $\exists$ anstelle von $\forall$.

a) Für zwei Mengen A, B bezeichnet $A \triangle B$ die Menge derjenigen Elemente aus A oder B, die nicht in beiden Mengen enthalten sind.

- Drücken Sie $A \triangle B$

(i) in der Form $\ldots \setminus \ldots$, (ii) in der Form $\ldots \cup \ldots$

aus.

b) Unter einer *Partition* einer gegebenen Menge A versteht man eine Menge aus Teilmengen $A_i \subseteq A$, $i \in I$, die *paarweise disjunkt* sind und deren Vereinigung gleich A ist: $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

(Dabei bedeutet ‘paarweise disjunkt, dass gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die Indexmenge I könnte z.B. endlich sein, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, oder auch unendlich, z.B. $I = \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{R}$. Zu jedem $i \in I$ gehört genau ein A_i, d.h., die Abbildung $i \mapsto A_i$ definiert die Menge von Mengen – man spricht dabei gerne von einer *Familie* von Mengen).

- Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Geben Sie eine einfache Partitionierung von $A = \mathbb{N}_0$ an, mit Indexmenge $I = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Stellen Sie die A_i in der Form $\{n \in \mathbb{N}_0 : \ldots\}$ dar (deskriptive Methode), und geben Sie einen Algorithmus (d.h. eine Rechenvorschrift) an, der bestimmt, in welchem der A_i eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ enthalten ist.

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad f(n) = \frac{n-1}{n+1}$

b) $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x + \frac{1}{x}$

Seien A, B und C beliebige Mengen und $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist auch f injektiv.

b) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist auch g surjektiv.

c) Ist $g \circ f$ bijektiv, dann ist f injektiv und g surjektiv.

a) Eine Bakterienkultur wächst pro Minute um 10%. Um 3:00 beträgt die Population 1 Milliarde Bakterien. Wie viele sind es um 4:00? Wie viele waren es um 0:00, als die Kultur aufgesetzt wurde?

Kommentieren Sie auch die Tatsache, dass sich bei der Rechnung keine natürlichen Zahlen ergeben, also streng genommen keine 'Anzahl' von Bakterien.

b) Geben Sie für die unter **a)** betrachtete Situation eine allgemeine Formel an: Anzahl der Bakterien $= B_n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der seit 0:00 (Startzeitpunkt) vergangenen *Sekunden* ist. Wie lautet die Formel für B_n?

Verwenden Sie Ihren elektronischen Rechenapparat.