

Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

[Aufgabe 1](#): Ein Induktionsbeweis; Teilbarkeit

[Aufgabe 2](#): Rechnen mit Summen

[Aufgabe 3](#): Variationen über das Induktionsprinzip

[Aufgabe 4](#): Rechnen mit geometrischen Summen

[Aufgabe 5](#): Unbestimmte Summen; Teleskopsummen

[Aufgabe 6](#): Mengenlehre und Aussagenlogik

[Aufgabe 7](#): Weiteres zum Thema Mengen

[Aufgabe 8](#): Injektivität und Surjektivität (i)

[Aufgabe 9](#): Injektivität und Surjektivität (ii)

[Aufgabe 10](#): Geometrische Progression: ein Anwendungsbeispiel

a) [L] Beweisen Sie die Identität (für $\ell \leq n$)

$$\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$



indem Sie $\ell \in \mathbb{N}_0$ beliebig (aber fest) wählen und Induktion bezüglich n verwenden.

Zu beachten: Induktionsanfang ist hier $n = \ell$.

b) [L] Behauptung:

Für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ ist $(m+1)^n - 1$ ohne Rest durch m teilbar.

Beweisen Sie diese Behauptung

- (i) mittels vollständiger Induktion,
- (ii) mittels Zurückführung auf eine bekannte Summenformel.

a) • Induktionsanfang ($n = \ell$): $\binom{\ell}{\ell} = \binom{\ell+1}{\ell+1} = 1$ ✓

• Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=\ell}^{n+1} \binom{k}{\ell} = \sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} + \binom{n+1}{\ell} \stackrel{\text{ind}}{=} \binom{n+1}{\ell+1} + \binom{n+1}{\ell} = \binom{n+2}{\ell+1} \quad \checkmark$$

(siehe Additionstheorem für Binomialkoeffizienten).

b) (i) Induktion über n für beliebiges festes m .

• Induktionsanfang ($n = 1$): $(m+1)^1 - 1 = m$ ✓

• Induktionsschluss $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned} (m+1)^{n+1} - 1 &= ((m+1)^{n+1} - (m+1)^n) + ((m+1)^n - 1) \\ &= (m+1-1)(m+1)^n + ((m+1)^n - 1) \\ &\stackrel{\text{ind}}{=} m \cdot (m+1)^n + m k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

\Rightarrow Auch $(m+1)^{n+1} - 1$ ist ohne Rest durch m teilbar. ✓

\rightarrow

(ii) Mittels geometrischer Summenformel:

$$\frac{(m+1)^n - 1}{m} = \frac{(m+1)^n - 1}{(m+1) - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} (m+1)^k \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

• Oder alternativ mittels ‘Binomi’:

$$\begin{aligned} (m+1)^n - 1 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k - 1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} m^k - 1 \quad \text{enthält Faktor } m. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Das waren drei verschiedene Beweise für b)!

a) [L] Schreiben Sie den Ausdruck ($n \in \mathbb{N}$)

$$(x_1 - y_1) x_2 \cdots x_n + y_1 (x_2 - y_2) x_3 \cdots x_n + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1} (x_n - y_n)$$

mit Hilfe des Summen- und des Produktsymbols (\sum , \prod) an.

b) [L] Die offensichtliche Identität $x_1 x_2 - y_1 y_2 = (x_1 - y_1) x_2 + y_1 (x_2 - y_2)$ verallgemeinert sich wie folgt ($n \in \mathbb{N}$):

$$\text{Für } X_n = x_1 \cdots x_n, Y_n = y_1 \cdots y_n \text{ gilt } X_n - Y_n = \text{Summe aus a).}$$

Führen Sie zum Beweis dieser Formel den Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ durch.

a)

$$\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} y_j \cdot (x_i - y_i) \cdot \prod_{j=i+1}^n x_j \right)$$

b) Induktionsschluss $n \mapsto n + 1$:

$$\begin{aligned} X_{n+1} - Y_{n+1} &= X_n x_{n+1} - Y_n y_{n+1} \\ &= X_n x_{n+1} - Y_n x_{n+1} + Y_n x_{n+1} - Y_n y_{n+1} \\ &= (X_n - Y_n) x_{n+1} + Y_n (x_{n+1} - y_{n+1}) \\ &\stackrel{\text{ind}}{=} \left((x_1 - y_1) x_2 \cdots x_n + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1} (x_n - y_n) \right) x_{n+1} \\ &\quad + y_1 \cdots y_n (x_{n+1} - y_{n+1}) \\ &= (x_1 - y_1) x_2 \cdots x_{n+1} + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1} (x_n - y_n) x_{n+1} \\ &\quad + y_1 \cdots y_n (x_{n+1} - y_{n+1}) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ein häufiger Trick: Einen geeigneten Term addieren und subtrahieren.

Anmerkung: Im Beweis haben wir nirgends die Kommutativität der Multiplikation verwendet. Die Aussage gilt daher allgemeiner auch für Objekte, bei denen die Multiplikation nicht kommutativ ist, wie z.B. quadratische Matrizen $A_i, B_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, mit nichtkommutativer Matrixmultiplikation $AB \neq BA$, siehe 'Lineare Algebra'.

□

Zwei Varianten des Induktionsprinzips. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

- a) [L] Sei $A(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen n , und es gelte $A(1)$. Falls man zeigen kann

$$\forall n \geq 2 : \exists m \in \{1, 2, \dots, n-1\} : A(m) \Rightarrow A(n)$$

dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- b) [L] Seien $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$ drei Aussagen über natürliche Zahlen n , wobei gelte

$$A(n) \Rightarrow B(n) \quad \text{und} \quad \neg A(n) \Rightarrow \neg C(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Falls $C(1)$ zutrifft und falls man zeigen kann dass $B(n-1) \Rightarrow C(n)$ für alle $n > 1$, dann gilt $A(n)$, $B(n)$ und $C(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- a) Die Behauptung ist **wahr**. Beweis indirekt (Kontraposition):

Annahme, die Behauptung ist falsch:

$$\exists n \geq 2 : \neg A(n)$$

Laut Voraussetzung muss daher gelten

$$\nexists m \in \{1, 2, \dots, n-1\} : A(m)$$

\rightsquigarrow **Widerspruch** zum Induktionsanfang $A(1)$. ✓

- b) Die Behauptung ist **wahr**. Informeller Beweis:

Laut Voraussetzung gilt

$$A(n) \Rightarrow B(n) \quad \text{und} \quad C(n) \Rightarrow A(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$B(n-1) \Rightarrow C(n) \quad \text{für alle } n \geq 1$$

Daher, startend mit Induktionsvoraussetzung $C(1)$:

$$C(1) \Rightarrow A(1) \Rightarrow B(1) \Rightarrow C(2)$$

$$\Rightarrow A(2) \Rightarrow B(2) \Rightarrow C(3) \quad \dots \quad \checkmark$$

Ein streng formaler Beweis erfolgt indirekt (vgl. **a**) bzw. mittels Zurückführung auf die Standardvariante der vollständigen Induktion.

□

- a) [L] (*) Schreiben Sie die geom. Summe $\sum_{k=0}^n x^k$ in die Form $\sum_{\ell=0}^n a_{\ell} (x-1)^{\ell}$ um. Wie lauten die betreffenden Koeffizienten a_{ℓ} ?

Anmerkung: Hier tritt eine *Doppelsumme* auf, die geeignet umzuordnen ist. Beachten Sie auch Aufgabe **1a**).

- b) [L] Setzen Sie $x = 1 + \varepsilon$, multiplizieren Sie x^{n+1} aus und vereinfachen Sie die

geometrische Summenformel $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

(Darstellung als Polynom in ε). Was passiert für $\varepsilon = 0$ (d.h. $x = 1$)? Ist das immer noch ein unbestimmter Ausdruck?

- a) 'Binomi' \rightsquigarrow

$$\sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n (x-1+1)^k = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (x-1)^{\ell}$$

Doppelsumme umordnen (beachte Notation):

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k = \sum_{k, \ell \leq n: \ell \leq k} = \sum_{\ell, k \leq n: k \geq \ell} = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=\ell}^n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{\ell=0}^n \left(\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} \right) (x-1)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} (x-1)^{\ell}$$

mit (siehe **1a**)

$$a_{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

- b) 'Binomi' für $x = 1 + \varepsilon$ \rightsquigarrow

$$x^{n+1} - 1 = (1+\varepsilon)^{n+1} - 1 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varepsilon^k - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varepsilon^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n (1+\varepsilon)^k = \frac{(1+\varepsilon)^{n+1} - 1}{(1+\varepsilon) - 1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varepsilon^{k-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \varepsilon^k$$

... Polynom in ε , mit Wert $n+1$ für $\varepsilon = 0$.

Beachte: **a**), **b**) sind eng verwandte Fragestellungen.

□

Die (bekannte) Formel für den Wert der Summe $\sum_{k=1}^n k^2$ ($n \in \mathbb{N}$) kann man mittels Induktion beweisen, falls man sie bereits kennt. Eine *konstruktive* Methode zur Berechnung dieser Summenformel funktioniert wie folgt:

- a) [L] Betrachten Sie den Formelausdruck $F(k) = a k^3 + b k^2 + c k + d$ und bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ so dass $F(k+1) - F(k) = k^2$ für beliebige k gilt. *What about d ?*

Anmerkung: $F(k)$ nennt man die *unbestimmte Summe* (oder auch *diskrete Stammfunktion*) der Folge der Zahlen $f(k) = k^2$.¹

- b) [L] Berechnen Sie $\sum_{k=1}^n (F(k+1) - F(k))$

- c) [L] (*) Funktioniert diese Methode auch zur Berechnung von $\sum_{k=1}^n k^p$ ($p \in \mathbb{N}$ beliebig)? Wie berechnet sich die betreffende unbestimmte Summe?

(Sie sollen hier nur das ‘Muster’ erkennen, ohne streng formal zu argumentieren.)

- d) [L] Wie lautet die unbestimmte Summe der geometrischen Folge $f(k) = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$)? (Dabei ist $x \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl.)

- a) Ansatz $F(k) = a k^3 + b k^2 + c k + d \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} & F(k+1) - F(k) \\ &= (a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) + d) \\ &\quad - (a k^3 + b k^2 + c k + d) \\ &= a((k+1)^3 - k^3) + b((k+1)^2 - k^2) + c((k+1) - k) \\ &= a(3k^2 + 3k + 1) + b(2k + 1) + c(1) \\ &= 3a k^2 + (3a + 2b)k + (a + b + c) \stackrel{!}{=} k^2 (+0 \cdot k^1 + 0 \cdot k^0) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bei $k^2, k^1, k^0 \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} & 3a = 1, \quad 3a + 2b = 0, \quad a + b + c = 0, \\ \Rightarrow & a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{6} \\ \Rightarrow & F(k) = \frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + d, \quad d \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

¹ Es besteht eine enge Analogie zur Integralrechnung – vgl. die Begriffe ‘unbestimmtes Integral’, ‘Stammfunktion’.

b) \rightsquigarrow Teleskopsumme:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n (F(k+1) - F(k)) = F(n+1) - F(1) \\ &= \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} + d - d = \dots \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

Analog berechnet man die einfachere ‘Gauß’sche Summe’:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n(n+1)$$

c) Allgemein für $\sum k^p$ ($p \in \mathbb{N}$):

- Ansatz $F(k) = a_{p+1} k^{p+1} + a_p k^p + \dots + a_1 k + a_0$
- Multipliziere $F(k+1) - F(k)$ aus (mittels Binomi), ordne nach Potenzen von k
- Koeffizientenvergleich für $F(k+1) - F(k) \stackrel{!}{=} k^p$
- \rightsquigarrow gestaffeltes lineares Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten a_j :
Bestimme zunächst a_{p+1} , daraus a_p , usw., zuletzt a_1 .
Die ‘Summationskonstante’ $a_0 = d$ ist beliebig.
- Man kann beweisen, dass dieses Gleichungssystem für jedes $p \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Lösung besitzt (etwas mehr Arbeit).

d) Geometrische Folge x^k : $F(k)$ ‘errät’ man aus der geometrischen Summenformel:

$$\text{Für } F(k) = \frac{x^k}{x-1} + d \text{ gilt } F(k+1) - F(k) = x^k \quad (x \neq 1).$$

Jedoch: Spezialfall $x = 1$: $F(k) = k + d$.

□

- a) [L] Seien A und B zwei beliebige Mengen, und für jedes $x \in A$ gelte $x \notin B$, d.h. $\forall x \in A : x \notin B$.

Drücken Sie diese Eigenschaft mit Hilfe von $\subseteq, \cup, \cap, \dots$ (oder was auch immer) aus.

- b) [L] Unter der Annahme, dass a) gilt: Was folgt dann aus $x \in B$?
- c) [L] Wie lautet die logische Umkehrung der Aussage aus a)?
- d) [L] Gleiche Fragen wie unter a) – c), mit \exists anstelle von \forall .

- a) ‘Kein Element von A ist in B enthalten’, d.h. $A \cap B = \emptyset$

- b) Die Aussage a) ist logisch äquivalent zu

$$x \in A \Rightarrow x \notin B \quad \Leftrightarrow \quad x \in B \Rightarrow x \notin A$$

Das ist dieselbe Aussage, mit vertauschten Rollen von A und B .

- c) Logische Umkehrung:

$$\exists x \in A : x \in B,$$

daher $A \cap B \neq \emptyset$.

- d) $\exists x \in A : x \notin B$

- Es gibt (mindestens) ein Element in A , das nicht in B enthalten ist, d.h. $A \not\subseteq B$.
- Aus der Aussage folgt für $x \in B$ *nichts*.
- Logische Umkehrung:

$$\forall x \in A : x \in B,$$

daher $A \subseteq B$.



a) [L] Für zwei Mengen A, B bezeichnet $A \triangle B$ die Menge derjenigen Elemente aus A oder B , die nicht in beiden Mengen enthalten sind.

• Drücken Sie $A \triangle B$

(i) in der Form $\dots \setminus \dots$, (ii) in der Form $\dots \cup \dots$

aus.

b) [L] Unter einer *Partition* einer gegebenen Menge A versteht man eine Menge aus Teilmengen $A_i \subseteq A$, $i \in I$, die *paarweise disjunkt* sind und deren Vereinigung gleich A ist: $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

(Dabei bedeutet ‘paarweise disjunkt’, dass gilt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die Indexmenge I könnte z.B. endlich sein, $I = \{1, 2, \dots, n\}$, oder auch unendlich, z.B. $I = \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{R}$. Zu jedem $i \in I$ gehört genau ein A_i , d.h., die Abbildung $i \mapsto A_i$ definiert die Menge von Mengen – man spricht dabei gerne von einer *Familie* von Mengen).

• Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Geben Sie eine einfache Partitionierung von $A = \mathbb{N}_0$ an, mit Indexmenge $I = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Stellen Sie die A_i in der Form $\{n \in \mathbb{N}_0 : \dots\}$ dar (deskriptive Methode), und geben Sie einen Algorithmus (d.h. eine Rechenvorschrift) an, der bestimmt, in welchem der A_i eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ enthalten ist.

a) ‘Symmetrische Mengendifferenz’:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

b) Z.B.:

$$A_0 = \{0, k, 2k, 3k, \dots\},$$

$$A_1 = \{1, k+1, 2k+1, 3k+1, \dots\},$$

⋮

$$A_{k-1} = \{k-1, 2k-1, 3k-1, 4k-1, \dots\},$$

Deskriptive Darstellung:

$$A_i = \{n \in \mathbb{N}_0 : \underbrace{n \bmod k}_{\text{Rest bei Division durch } k} = i\}, \quad i = 0 \dots k-1$$

Die A_i nennt man *Restklassen mod k* .

Algorithmus: Für gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ bestimmt man den Index i als Rest bei der Division n/k .

□

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

a) [L] $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, f(n) = \frac{n-1}{n+1}$

b) [L] $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = x + \frac{1}{x}$

a) • f ist injektiv:

$$f(n) = f(m) \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} = \frac{m-1}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(m+1) = (m-1)(n+1)$$

$$\Leftrightarrow nm + n - m - 1 = mn + m - n - 1$$

$$\Leftrightarrow n - m = m - n \Leftrightarrow n - m = 0 \Leftrightarrow n = m$$

Oder: Man argumentiert, dass f strikt monoton wachsend ist, d.h.

$$f(n+1) = \frac{n}{n+2} > \frac{n-1}{n+1} = f(n)$$

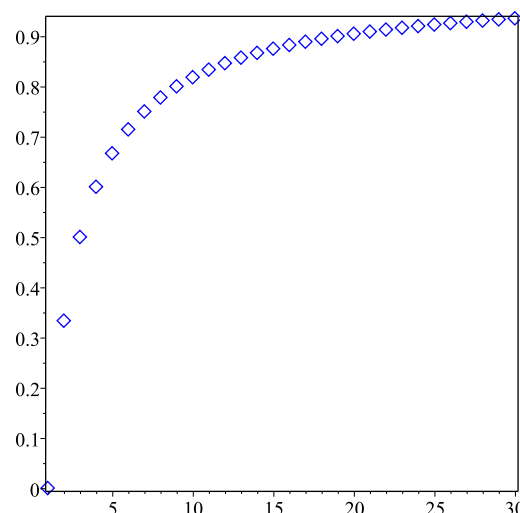
wegen

$$\underbrace{n(n+1)}_{n^2+n} > \underbrace{(n-1)(n+2)}_{n^2+n-2}.$$

Oder ganz direkt:

$$f(n) = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \text{ strikt monoton wachsend.}$$

- f ist **nicht surjektiv**, weil nicht alle $y \in \mathbb{Q}$ als Funktionswert angenommen werden.



- b) • f nicht surjektiv wegen $f(x) > \max\{x, 1/x\} \geq 1$ für alle $x > 0$
- f nicht injektiv wegen $f(x) = f(1/x)$

Oder Injektivität direkt gemäß Definition nachprüfen:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ oder } x_1 x_2 = 1, \text{ d.h. } x_2 = 1/x_1.$$

- Alternativ mittels Rechnung: Sei $y > 0$. Die Gleichung $f(x) = y$, d.h.

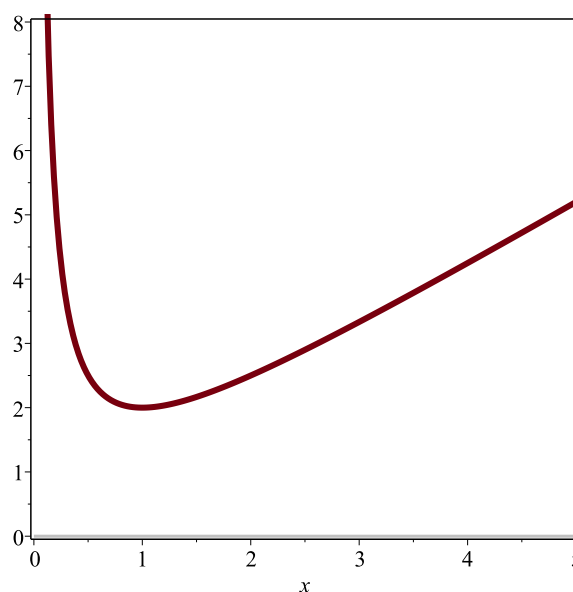
$$x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 - xy + 1 = 0 \quad (x \text{ kann nicht } 0 \text{ sein})$$

hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{y^2 - 4}$$

- $y < 2$: keine reelle Lösung $\Rightarrow f$ nicht surjektiv
- $y > 2$: zwei positive Lösungen $x_{1,2} \Rightarrow f$ nicht injektiv

Anmerkung: Es gilt $f(x) \geq 2$ für alle $x > 0$.



Seien A , B und C beliebige Mengen und $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ Abbildungen.

Zeigen Sie:

- [L]** Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist auch f injektiv.
- [L]** Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist auch g surjektiv.
- [L]** Ist $g \circ f$ bijektiv, dann ist f injektiv und g surjektiv.

a) Laut Voraussetzung ($g \circ f$ injektiv) gilt:

$$\text{Sei } a_1, a_2 \in A \text{ mit } (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

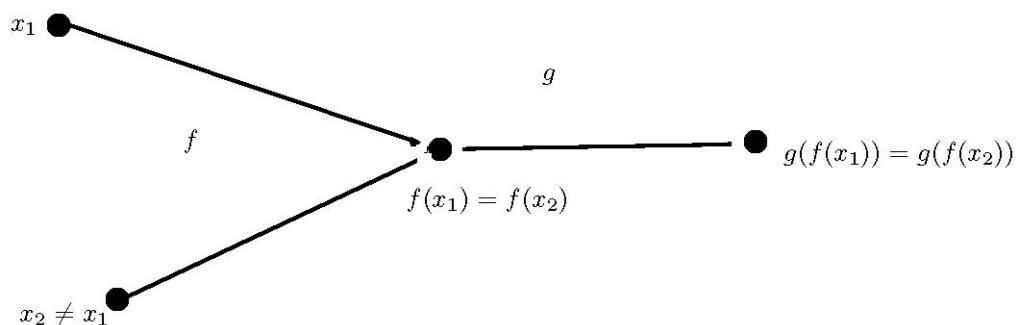
Nun: Nehme an $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow$

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \checkmark$$

Also ist f injektiv.

- Etwas einfacher umgekehrt gedacht:

f nicht injektiv $\Rightarrow g \circ f$ nicht injektiv (Skizze).



b) Laut Voraussetzung ($g \circ f$ surjektiv) gilt:

$$\forall c \in C \exists a \in A \text{ mit } (g \circ f)(a) = c, \quad \text{d.h. } g(f(a)) = c$$

\Rightarrow

$$\text{Für } b = f(a) \in B \text{ gilt } g(b) = c \quad \checkmark$$

Also ist g surjektiv.

- Auch hier etwas einfacher umgekehrt gedacht:

Wenn g nicht surjektiv ist, dann kann auch $g \circ f$ nicht surjektiv sein.

c) Direkte Folgerung aus **a)** und **b)**.

□

- a) [L] Eine Bakterienkultur wächst pro Minute um 10%. Um 3:00 beträgt die Population 1 Milliarde Bakterien. Wie viele sind es um 4:00? Wie viele waren es um 0:00, als die Kultur aufgesetzt wurde?

Kommentieren Sie auch die Tatsache, dass sich bei der Rechnung keine natürlichen Zahlen ergeben, also streng genommen keine ‘Anzahl’ von Bakterien.

- b) [L] Geben Sie für die unter **a)** betrachtete Situation eine allgemeine Formel an: Anzahl der Bakterien = B_n , wobei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der seit 0:00 (Startzeitpunkt) vergangenen *Sekunden* ist. Wie lautet die Formel für B_n ?

Verwenden Sie Ihren elektronischen Rechenapparat.

- a) Wachstum um 10% in einer Minute bedeutet

$$B_{1 \text{ min.}} = 1.1 \cdot B_{0 \text{ min.}}$$

\Rightarrow

nach Ablauf einer Stunde (60 min. zwischen 3:00 und 4:00):

$$B_{4:00} = (1.1)^{60} \cdot B_{3:00} \approx 304.5 \cdot 10^9 \approx 3 \cdot 10^{11}$$

und

$$B_{0:00} = (1.1)^{-180} B_{3:00} \approx 3.5 \cdot 10^{-8} \cdot 10^9 \approx 35.4$$

Das sind keine Rechnungen mit natürlichen Zahlen. Das mathematische Modell *schätzt* die Population mittels reeller Größen.

- b) Annahme: Wachstum ist gleichmäßig über die Zeit \Rightarrow

$$B_{1 \text{ [sec]}} = c \cdot B_{0 \text{ [sec]}}$$

mit

$$c^{60} = 1.1, \quad \text{d.h.} \quad c = 1.1^{1/60} = \sqrt[60]{1.1} \approx 1.0016$$

Dann gilt

$$B_{n \text{ [sec]}} = c^n \cdot B_{0 \text{ [sec]}}$$

□