

## Aufgaben zu Kapitel 1 und 2

[Aufgabe 1](#): Ein Induktionsbeweis; Teilbarkeit

[Aufgabe 2](#): Rechnen mit Summen

[Aufgabe 3](#): Variationen über das Induktionsprinzip

[Aufgabe 4](#): Rechnen mit geometrischen Summen

[Aufgabe 5](#): Unbestimmte Summen; Teleskopsummen

[Aufgabe 6](#): Mengenlehre und Aussagenlogik

[Aufgabe 7](#): Weiteres zum Thema Mengen

[Aufgabe 8](#): Injektivität und Surjektivität (i)

[Aufgabe 9](#): Injektivität und Surjektivität (ii)

[Aufgabe 10](#): Geometrische Progression: ein Anwendungsbeispiel

a) [L] Beweisen Sie die Identität (für  $\ell \leq n$ )

$$\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$



indem Sie  $\ell \in \mathbb{N}_0$  beliebig (aber fest) wählen und Induktion bezüglich  $n$  verwenden.

Zu beachten: Induktionsanfang ist hier  $n = \ell$ .

b) [L] Behauptung:

Für beliebige  $m, n \in \mathbb{N}$  ist  $(m+1)^n - 1$  ohne Rest durch  $m$  teilbar.

Beweisen Sie diese Behauptung

- (i) mittels vollständiger Induktion,
- (ii) mittels Zurückführung auf eine bekannte Summenformel.

a) • Induktionsanfang ( $n = \ell$ ):  $\binom{\ell}{\ell} = \binom{\ell+1}{\ell+1} = 1$  ✓

• Induktionsschluss  $n \mapsto n+1$ :

$$\sum_{k=\ell}^{n+1} \binom{k}{\ell} = \sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} + \binom{n+1}{\ell} \stackrel{\text{ind}}{=} \binom{n+1}{\ell+1} + \binom{n+1}{\ell} = \binom{n+2}{\ell+1} \quad \checkmark$$

(siehe Additionstheorem für Binomialkoeffizienten).

b) (i) Induktion über  $n$  für beliebiges festes  $m$ .

• Induktionsanfang ( $n = 1$ ):  $(m+1)^1 - 1 = m$  ✓

• Induktionsschluss  $n \mapsto n+1$ :

$$\begin{aligned} (m+1)^{n+1} - 1 &= ((m+1)^{n+1} - (m+1)^n) + ((m+1)^n - 1) \\ &= (m+1-1)(m+1)^n + ((m+1)^n - 1) \\ &\stackrel{\text{ind}}{=} m \cdot (m+1)^n + m k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Auch  $(m+1)^{n+1} - 1$  ist ohne Rest durch  $m$  teilbar. ✓



(ii) Mittels geometrischer Summenformel:

$$\frac{(m+1)^n - 1}{m} = \frac{(m+1)^n - 1}{(m+1) - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} (m+1)^k \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

• Oder alternativ mittels ‘Binomi’:

$$\begin{aligned} (m+1)^n - 1 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} m^k - 1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} m^k - 1 \quad \text{enthält Faktor } m. \quad \checkmark \end{aligned}$$

*Das waren drei verschiedene Beweise für b)!*



a) [L] Schreiben Sie den Ausdruck ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$(x_1 - y_1) x_2 \cdots x_n + y_1 (x_2 - y_2) x_3 \cdots x_n + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1} (x_n - y_n)$$

mit Hilfe des Summen- und des Produktsymbols ( $\sum$ ,  $\prod$ ) an.

b) [L] Die offensichtliche Identität  $x_1 x_2 - y_1 y_2 = (x_1 - y_1) x_2 + y_1 (x_2 - y_2)$  verallgemeinert sich wie folgt ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$\text{Für } X_n = x_1 \cdots x_n, Y_n = y_1 \cdots y_n \text{ gilt } X_n - Y_n = \text{Summe aus a).}$$

Führen Sie zum Beweis dieser Formel den Induktionsschritt  $n \mapsto n + 1$  durch.

a)

$$\sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1}^{i-1} y_j \cdot (x_i - y_i) \cdot \prod_{j=i+1}^n x_j \right)$$

b) Induktionsschluss  $n \mapsto n + 1$ :

$$\begin{aligned} X_{n+1} - Y_{n+1} &= X_n x_{n+1} - Y_n y_{n+1} \\ &= X_n x_{n+1} - Y_n x_{n+1} + Y_n x_{n+1} - Y_n y_{n+1} \\ &= (X_n - Y_n) x_{n+1} + Y_n (x_{n+1} - y_{n+1}) \\ &\stackrel{\text{ind}}{=} \left( (x_1 - y_1) x_2 \cdots x_n + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1} (x_n - y_n) \right) x_{n+1} \\ &\quad + y_1 \cdots y_n (x_{n+1} - y_{n+1}) \\ &= (x_1 - y_1) x_2 \cdots x_{n+1} + \cdots + y_1 \cdots y_{n-1} (x_n - y_n) x_{n+1} \\ &\quad + y_1 \cdots y_n (x_{n+1} - y_{n+1}) \quad \checkmark \end{aligned}$$

*Ein häufiger Trick: Einen geeigneten Term addieren und subtrahieren.*

Anmerkung: Im Beweis haben wir nirgends die Kommutativität der Multiplikation verwendet. Die Aussage gilt daher allgemeiner auch für Objekte, bei denen die Multiplikation nicht kommutativ ist, wie z.B. quadratische Matrizen  $A_i, B_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , mit nichtkommutativer Matrixmultiplikation  $AB \neq BA$ , siehe 'Lineare Algebra'.

□

Zwei Varianten des Induktionsprinzips. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

- a) [L] Sei  $A(n)$  eine Aussage über natürliche Zahlen  $n$ , und es gelte  $A(1)$ . Falls man zeigen kann

$$\forall n \geq 2 : \exists m \in \{1, 2, \dots, n-1\} : A(m) \Rightarrow A(n)$$

dann gilt  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- b) [L] Seien  $A(n)$ ,  $B(n)$  und  $C(n)$  drei Aussagen über natürliche Zahlen  $n$ , wobei gelte

$$A(n) \Rightarrow B(n) \quad \text{und} \quad \neg A(n) \Rightarrow \neg C(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Falls  $C(1)$  zutrifft und falls man zeigen kann dass  $B(n-1) \Rightarrow C(n)$  für alle  $n > 1$ , dann gilt  $A(n)$ ,  $B(n)$  und  $C(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Die Behauptung ist **wahr**. Beweis indirekt (Kontraposition):

Annahme, die Behauptung ist falsch:

$$\exists n \geq 2 : \neg A(n)$$

Laut Voraussetzung muss daher gelten

$$\nexists m \in \{1, 2, \dots, n-1\} : A(m)$$

$\rightsquigarrow$  **Widerspruch** zum Induktionsanfang  $A(1)$ . ✓

- b) Die Behauptung ist **wahr**. Informeller Beweis:

Laut Voraussetzung gilt

$$A(n) \Rightarrow B(n) \quad \text{und} \quad C(n) \Rightarrow A(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$B(n-1) \Rightarrow C(n) \quad \text{für alle } n \geq 1$$

Daher, startend mit Induktionsvoraussetzung  $C(1)$ :

$$C(1) \Rightarrow A(1) \Rightarrow B(1) \Rightarrow C(2)$$

$$\Rightarrow A(2) \Rightarrow B(2) \Rightarrow C(3) \quad \dots \quad \checkmark$$

Ein streng formaler Beweis erfolgt indirekt (vgl. **a**) bzw. mittels Zurückführung auf die Standardvariante der vollständigen Induktion.

□

- a) [L] (\*) Schreiben Sie die geom. Summe  $\sum_{k=0}^n x^k$  in die Form  $\sum_{\ell=0}^n a_{\ell} (x-1)^{\ell}$  um. Wie lauten die betreffenden Koeffizienten  $a_{\ell}$ ?

Anmerkung: Hier tritt eine *Doppelsumme* auf, die geeignet umzuordnen ist. Beachten Sie auch Aufgabe **1a**).

- b) [L] Setzen Sie  $x = 1 + \varepsilon$ , multiplizieren Sie  $x^{n+1}$  aus und vereinfachen Sie die

geometrische Summenformel  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

(Darstellung als Polynom in  $\varepsilon$ ). Was passiert für  $\varepsilon = 0$  (d.h.  $x = 1$ )? Ist das immer noch ein unbestimmter Ausdruck?

- a) 'Binomi'  $\rightsquigarrow$

$$\sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n (x-1+1)^k = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (x-1)^{\ell}$$

Doppelsumme umordnen (beachte Notation):

$$\sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k = \sum_{k, \ell \leq n: \ell \leq k} = \sum_{\ell, k \leq n: k \geq \ell} = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=\ell}^n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{\ell=0}^n \left( \sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} \right) (x-1)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} (x-1)^{\ell}$$

mit (siehe **1a**)

$$a_{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

- b) 'Binomi' für  $x = 1 + \varepsilon$   $\rightsquigarrow$

$$x^{n+1} - 1 = (1+\varepsilon)^{n+1} - 1 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varepsilon^k - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varepsilon^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n (1+\varepsilon)^k = \frac{(1+\varepsilon)^{n+1} - 1}{(1+\varepsilon) - 1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varepsilon^{k-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} \varepsilon^k$$

... Polynom in  $\varepsilon$ , mit Wert  $n+1$  für  $\varepsilon = 0$ .

Beachte: **a**), **b**) sind eng verwandte Fragestellungen.

□

Die (bekannte) Formel für den Wert der Summe  $\sum_{k=1}^n k^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) kann man mittels Induktion beweisen, falls man sie bereits kennt. Eine *konstruktive* Methode zur Berechnung dieser Summenformel funktioniert wie folgt:

- a) [L] Betrachten Sie den Formelausdruck  $F(k) = a k^3 + b k^2 + c k + d$  und bestimmen Sie  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$  so dass  $F(k+1) - F(k) = k^2$  für beliebige  $k$  gilt. *What about  $d$ ?*

Anmerkung:  $F(k)$  nennt man die *unbestimmte Summe* (oder auch *diskrete Stammfunktion*) der Folge der Zahlen  $f(k) = k^2$ .<sup>1</sup>

- b) [L] Berechnen Sie  $\sum_{k=1}^n (F(k+1) - F(k))$

- c) [L] (\*) Funktioniert diese Methode auch zur Berechnung von  $\sum_{k=1}^n k^p$  ( $p \in \mathbb{N}$  beliebig)? Wie berechnet sich die betreffende unbestimmte Summe?

(Sie sollen hier nur das ‘Muster’ erkennen, ohne streng formal zu argumentieren.)

- d) [L] Wie lautet die unbestimmte Summe der geometrischen Folge  $f(k) = x^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ )? (Dabei ist  $x \in \mathbb{R}$  eine feste Zahl.)

- a) Ansatz  $F(k) = a k^3 + b k^2 + c k + d \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} & F(k+1) - F(k) \\ &= (a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) + d) \\ &\quad - (a k^3 + b k^2 + c k + d) \\ &= a((k+1)^3 - k^3) + b((k+1)^2 - k^2) + c((k+1) - k) \\ &= a(3k^2 + 3k + 1) + b(2k + 1) + c(1) \\ &= 3a k^2 + (3a + 2b)k + (a + b + c) \stackrel{!}{=} k^2 (+0 \cdot k^1 + 0 \cdot k^0) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bei  $k^2, k^1, k^0 \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} & 3a = 1, \quad 3a + 2b = 0, \quad a + b + c = 0, \\ \Rightarrow & a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{6} \\ \Rightarrow & F(k) = \frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} + d, \quad d \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Es besteht eine enge Analogie zur Integralrechnung – vgl. die Begriffe ‘unbestimmtes Integral’, ‘Stammfunktion’.

b)  $\rightsquigarrow$  Teleskopsumme:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n (F(k+1) - F(k)) = F(n+1) - F(1) \\ &= \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} + d - d = \dots \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

Analog berechnet man die einfachere ‘Gauß’sche Summe’:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n(n+1)$$

c) Allgemein für  $\sum k^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ):

- Ansatz  $F(k) = a_{p+1} k^{p+1} + a_p k^p + \dots + a_1 k + a_0$
- Multipliziere  $F(k+1) - F(k)$  aus (mittels Binomi), ordne nach Potenzen von  $k$
- Koeffizientenvergleich für  $F(k+1) - F(k) \stackrel{!}{=} k^p$
- $\rightsquigarrow$  gestaffeltes lineares Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten  $a_j$ :  
Bestimme zunächst  $a_{p+1}$ , daraus  $a_p$ , usw., zuletzt  $a_1$ .  
Die ‘Summationskonstante’  $a_0 = d$  ist beliebig.
- Man kann beweisen, dass dieses Gleichungssystem für jedes  $p \in \mathbb{N}$  eine eindeutige Lösung besitzt (etwas mehr Arbeit).

d) Geometrische Folge  $x^k$ :  $F(k)$  ‘errät’ man aus der geometrischen Summenformel:

$$\text{Für } F(k) = \frac{x^k}{x-1} + d \text{ gilt } F(k+1) - F(k) = x^k \quad (x \neq 1).$$

Jedoch: Spezialfall  $x = 1$ :  $F(k) = k + d$ .

□

- a) [L] Seien  $A$  und  $B$  zwei beliebige Mengen, und für jedes  $x \in A$  gelte  $x \notin B$ , d.h.  $\forall x \in A : x \notin B$ .

Drücken Sie diese Eigenschaft mit Hilfe von  $\subseteq, \cup, \cap, \dots$  (oder was auch immer) aus.

- b) [L] Unter der Annahme, dass a) gilt: Was folgt dann aus  $x \in B$ ?
- c) [L] Wie lautet die logische Umkehrung der Aussage aus a)?
- d) [L] Gleiche Fragen wie unter a) – c), mit  $\exists$  anstelle von  $\forall$ .

- a) ‘Kein Element von  $A$  ist in  $B$  enthalten’, d.h.  $A \cap B = \emptyset$

- b) Die Aussage a) ist logisch äquivalent zu

$$x \in A \Rightarrow x \notin B \quad \Leftrightarrow \quad x \in B \Rightarrow x \notin A$$

Das ist dieselbe Aussage, mit vertauschten Rollen von  $A$  und  $B$ .

- c) Logische Umkehrung:

$$\exists x \in A : x \in B,$$

daher  $A \cap B \neq \emptyset$ .

- d)  $\exists x \in A : x \notin B$

- Es gibt (mindestens) ein Element in  $A$ , das nicht in  $B$  enthalten ist, d.h.  $A \not\subseteq B$ .
- Aus der Aussage folgt für  $x \in B$  *nichts*.
- Logische Umkehrung:

$$\forall x \in A : x \in B,$$

daher  $A \subseteq B$ .



a) [L] Für zwei Mengen  $A, B$  bezeichnet  $A \triangle B$  die Menge derjenigen Elemente aus  $A$  oder  $B$ , die nicht in beiden Mengen enthalten sind.

• Drücken Sie  $A \triangle B$

(i) in der Form  $\dots \setminus \dots$ , (ii) in der Form  $\dots \cup \dots$

aus.

b) [L] Unter einer *Partition* einer gegebenen Menge  $A$  versteht man eine Menge aus Teilmengen  $A_i \subseteq A$ ,  $i \in I$ , die *paarweise disjunkt* sind und deren Vereinigung gleich  $A$  ist:  $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ .

(Dabei bedeutet ‘paarweise disjunkt’, dass gilt  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ . Die Indexmenge  $I$  könnte z.B. endlich sein,  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , oder auch unendlich, z.B.  $I = \mathbb{N}$  oder  $I = \mathbb{R}$ . Zu jedem  $i \in I$  gehört genau ein  $A_i$ , d.h., die Abbildung  $i \mapsto A_i$  definiert die Menge von Mengen – man spricht dabei gerne von einer *Familie* von Mengen).

• Sei  $k \in \mathbb{N}$  gegeben. Geben Sie eine einfache Partitionierung von  $A = \mathbb{N}_0$  an, mit Indexmenge  $I = \{0, 1, \dots, k-1\}$ . Stellen Sie die  $A_i$  in der Form  $\{n \in \mathbb{N}_0 : \dots\}$  dar (deskriptive Methode), und geben Sie einen Algorithmus (d.h. eine Rechenvorschrift) an, der bestimmt, in welchem der  $A_i$  eine gegebene Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  enthalten ist.

a) ‘Symmetrische Mengendifferenz’:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

b) Z.B.:

$$A_0 = \{0, k, 2k, 3k, \dots\},$$

$$A_1 = \{1, k+1, 2k+1, 3k+1, \dots\},$$

⋮

$$A_{k-1} = \{k-1, 2k-1, 3k-1, 4k-1, \dots\},$$

Deskriptive Darstellung:

$$A_i = \{n \in \mathbb{N}_0 : \underbrace{n \bmod k}_{\text{Rest bei Division durch } k} = i\}, \quad i = 0 \dots k-1$$

Die  $A_i$  nennt man *Restklassen mod  $k$* .

*Algorithmus:* Für gegebenes  $n \in \mathbb{N}_0$  bestimmt man den Index  $i$  als Rest bei der Division  $n/k$ .

□

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Injektivität und Surjektivität:

a) [L]  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, f(n) = \frac{n-1}{n+1}$

b) [L]  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = x + \frac{1}{x}$

a) •  $f$  ist injektiv:

$$f(n) = f(m) \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} = \frac{m-1}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(m+1) = (m-1)(n+1)$$

$$\Leftrightarrow nm + n - m - 1 = mn + m - n - 1$$

$$\Leftrightarrow n - m = m - n \Leftrightarrow n - m = 0 \Leftrightarrow n = m$$

Oder: Man argumentiert, dass  $f$  strikt monoton wachsend ist, d.h.

$$f(n+1) = \frac{n}{n+2} > \frac{n-1}{n+1} = f(n)$$

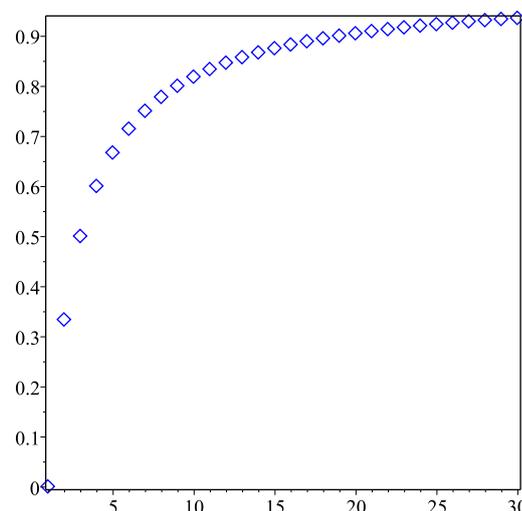
wegen

$$\underbrace{n(n+1)}_{n^2+n} > \underbrace{(n-1)(n+2)}_{n^2+n-2}.$$

Oder ganz direkt:

$$f(n) = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \text{ strikt monoton wachsend.}$$

- $f$  ist nicht surjektiv, weil nicht alle  $y \in \mathbb{Q}$  als Funktionswert angenommen werden.



- b) •  $f$  nicht surjektiv wegen  $f(x) > \max\{x, 1/x\} \geq 1$  für alle  $x > 0$
- $f$  nicht injektiv wegen  $f(x) = f(1/x)$

Oder Injektivität direkt gemäß Definition nachprüfen:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ oder } x_1 x_2 = 1, \text{ d.h. } x_2 = 1/x_1.$$

- Alternativ mittels Rechnung: Sei  $y > 0$ . Die Gleichung  $f(x) = y$ , d.h.

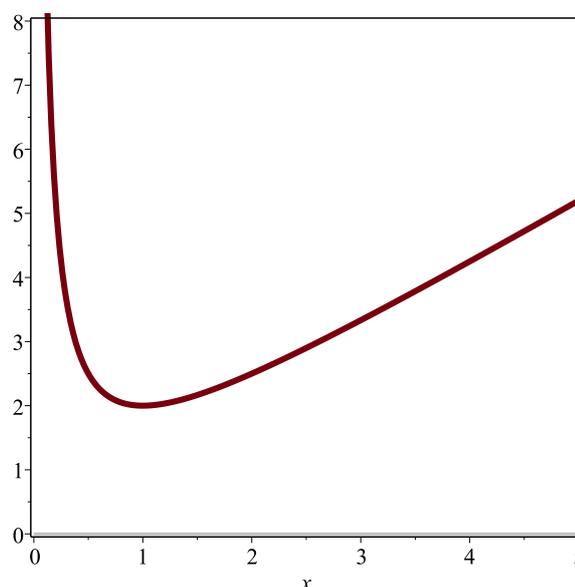
$$x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 - xy + 1 = 0 \quad (x \text{ kann nicht } 0 \text{ sein})$$

hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{y^2 - 4}$$

- $y < 2$ : keine reelle Lösung  $\Rightarrow f$  nicht surjektiv
- $y > 2$ : zwei positive Lösungen  $x_{1,2} \Rightarrow f$  nicht injektiv

Anmerkung: Es gilt  $f(x) \geq 2$  für alle  $x > 0$ .



Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  beliebige Mengen und  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  Abbildungen.

Zeigen Sie:

- [L] Ist  $g \circ f$  injektiv, dann ist auch  $f$  injektiv.
- [L] Ist  $g \circ f$  surjektiv, dann ist auch  $g$  surjektiv.
- [L] Ist  $g \circ f$  bijektiv, dann ist  $f$  injektiv und  $g$  surjektiv.

**a)** Laut Voraussetzung ( $g \circ f$  injektiv) gilt:

$$\text{Sei } a_1, a_2 \in A \text{ mit } (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

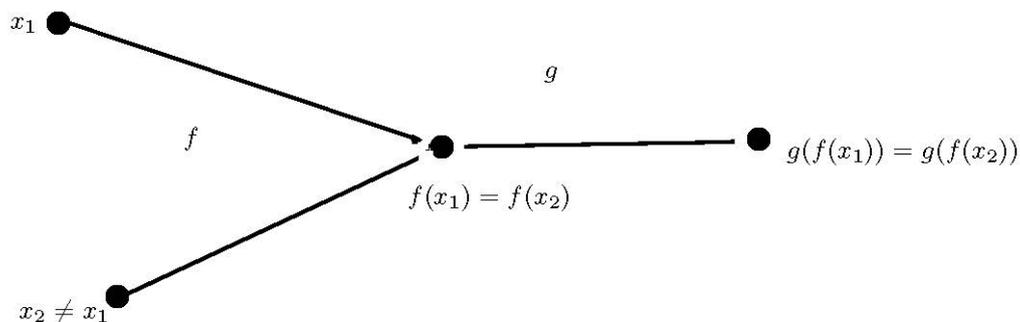
Nun: Nehme an  $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow$

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \quad \checkmark$$

Also ist  $f$  injektiv.

- Etwas einfacher umgekehrt gedacht:

$f$  nicht injektiv  $\Rightarrow g \circ f$  nicht injektiv (Skizze).



**b)** Laut Voraussetzung ( $g \circ f$  surjektiv) gilt:

$$\forall c \in C \exists a \in A \text{ mit } (g \circ f)(a) = c, \quad \text{d.h. } g(f(a)) = c$$

$\Rightarrow$

Für  $b = f(a) \in B$  gilt  $g(b) = c \quad \checkmark$

Also ist  $g$  surjektiv.

- Auch hier etwas einfacher umgekehrt gedacht:

Wenn  $g$  nicht surjektiv ist, dann kann auch  $g \circ f$  nicht surjektiv sein.

**c)** Direkte Folgerung aus **a)** und **b)**.

□

- a) [L] Eine Bakterienkultur wächst pro Minute um 10%. Um 3:00 beträgt die Population 1 Milliarde Bakterien. Wie viele sind es um 4:00? Wie viele waren es um 0:00, als die Kultur aufgesetzt wurde?

Kommentieren Sie auch die Tatsache, dass sich bei der Rechnung keine natürlichen Zahlen ergeben, also streng genommen keine ‘Anzahl’ von Bakterien.

- b) [L] Geben Sie für die unter **a)** betrachtete Situation eine allgemeine Formel an: Anzahl der Bakterien =  $B_n$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$  die Anzahl der seit 0:00 (Startzeitpunkt) vergangenen *Sekunden* ist. Wie lautet die Formel für  $B_n$ ?

Verwenden Sie Ihren elektronischen Rechenapparat.

- a) Wachstum um 10% in einer Minute bedeutet

$$B_{1 \text{ min.}} = 1.1 \cdot B_{0 \text{ min.}}$$

$\Rightarrow$

nach Ablauf einer Stunde (60 min. zwischen 3:00 und 4:00):

$$B_{4:00} = (1.1)^{60} \cdot B_{3:00} \approx 304.5 \cdot 10^9 \approx 3 \cdot 10^{11}$$

und

$$B_{0:00} = (1.1)^{-180} B_{3:00} \approx 3.5 \cdot 10^{-8} \cdot 10^9 \approx 35.4$$

Das sind keine Rechnungen mit natürlichen Zahlen. Das mathematische Modell *schätzt* die Population mittels reeller Größen.

- b) Annahme: Wachstum ist gleichmäßig über die Zeit  $\Rightarrow$

$$B_{1 \text{ [sec]}} = c \cdot B_{0 \text{ [sec]}}$$

mit

$$c^{60} = 1.1, \quad \text{d.h.} \quad c = 1.1^{1/60} = \sqrt[60]{1.1} \approx 1.0016$$

Dann gilt

$$B_{n \text{ [sec]}} = c^n \cdot B_{0 \text{ [sec]}}$$

□