Aufgaben zu Kapitel 2–4

a) Zeigen Sie; Das Intervall $(0, 1)$ hat dieselbe Mächtigkeit wie ein beliebiges Intervall (a, b), wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Hinweis: Finden Sie eine bijektive Abbildung zwischen $(0, 1)$ und (a, b).

Lassen Sie auch $a = 0$, $b = \infty$ als Grenzfall zu. Die naheliegende Bijektion für den Fall $a, b \in \mathbb{R}$ lässt sich jedoch nicht auf diesen Grenzfall übertragen. [1]

b) Sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$ Elementen. Wieviele Elemente $|P(A)|$ hat die Potenzmenge $P(A)$?

---

[1] Ähnlich funktioniert es für (a, ∞), $(-\infty, b)$ und $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

a) Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ \ f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ('Harmonische Summen').

(i) *Ist f injektiv?*

(ii) *Ist f surjektiv?*

(iii) Falls Injektivität gegeben ist, dann ist f als Funktion $f : f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ bijektiv.

Lässt sich das Bild $f(\mathbb{N})$ in einfacher Weise darstellen? Können Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ explizit angeben?

b) Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ \ f(n) = \frac{n-1}{n}$. Analoge Fragen wie unter **a)**.

Gegeben sei die reelle Funktion $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$

Dabei bedeutet $\sqrt{x}$ wie üblich die positive Wurzel aus $x \geq 0$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.

b) Geben Sie $y \geq 0$ vor und lösen Sie die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Überprüfen Sie nochmals Ihr Ergebnis[2] aus **b)** und überlegen Sie, für welche Werte von y der betreffende Wert von x überhaupt wohldefiniert ist (als reelle Zahl). Was folgern Sie daraus?

---

[2] Falls Sie unter **b)** bereits sorgfältig und korrekt vorgegangen sind, haben Sie **c)** bereits vorweggenommen.

a) Wandeln Sie den periodischen Dezimalbruch

$$0.0740740740740740740740\ldots$$

in rationale Darstellung um.

b) Geben Sie die Dezimaldarstellung der rationalen Zahl $\frac{10}{33}$ an.

Welche Folgen (a_n) konvergieren? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz ihren Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{1 - 5\,n^4}{n^4 + 8\,n^3}$

b) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\,n - 1}$

c) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k-n}$

d) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^{-k}$

e) $a_n = \dfrac{2 + n}{2 + n\,(-1)^n}$

f) $a_n =$ Produkt der Folgenelemente aus **d)** und **e)**

---

a) $(*)$ Zeigen Sie:

Für $|q| < 1$ und $p \in \mathbb{N}$ ist die Folge (a_n) mit $a_n = n^p\, q^n$ eine Nullfolge.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Folge $(|a_n|)$ für hinreichend große n strikt monoton fallend ist. Zur Bestimmung des Grenzwertes nützt man aus, dass gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.

b) Zeichnen Sie den Verlauf der Folgen aus **a)** für $p = 1, 2, 3, \ldots$

c) $(*)$ Die beiden Folgen (a_n) und (b_n) seien definiert als die Lösungspaare x der von n abhängigen quadratischen Gleichung

$$x^2 - n\,x + 1 = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Studieren Sie die Konvergenz dieser Folgen sowie die Konvergenz der Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n\, b_n)$.

---

a) Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = \lambda\, a_n + \mu\, a_{n-1}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ .$$

Finden Sie alle Lösungen der Gestalt $a_n = \xi^n$ (die möglichen Werte von ξ sind zu bestimmen) und daraus eine allgemeine Schar von Lösungen.[3]

(Achtung Sonderfall – siehe **d)**.)

b) Nun seien zwei Anfangswerte a_1, a_2 vorgegeben. Wie lauten die Glieder a_n der Folge in Anhängigkeit von a_1 and a_2?

c) Sei nun (a_n) die *Fibonacci-Folge* $(\lambda = \mu = 1)$ mit Anfangswerten $a_1 = a_2 = 1$. Wie lauten die a_n ?

d) Sonderfall aus **a)**: Was ist hier anders?

Anmerkung: Wir betrachten hier nur den Fall, dass sich für ξ reelle Werte ergeben. Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ergeben sich komplexe Werte? (Dieser Fall erfordert komplexe Arithmetik; darauf gehen wir hier nicht genauer ein.)

---

[3] Vgl. den einfacheren Fall $a_{n+1} = \lambda\, a_n$: Hier lautet die allgemeine Lösung $a_n = c\,\lambda^n$, c beliebig.

Betrachten Sie nochmals Folgen gemäß Aufgabe 7, mit den dort bestimmten Parametern ξ_1 und ξ_2. Wir studieren das asymptotische Verhalten dieser Folgen für $n \to \infty$.

a) Für welche Werte von ξ_1 und ξ_2

(i) ist jede mögliche Lösung (a_n) eine Nullfolge?

(ii) ist jede mögliche Lösung (a_n) beschränkt?

(iii) ist jede mögliche Lösung (a_n) divergent? [4]

b) Gibt es Fälle, in denen – in Abhängigkeit von den vorgegebenen Anfangswerten a_1, a_2 – die Lösung entweder gegen 0 konvergiert oder aber divergiert?

Was passiert hier, wenn die Anfangswerte a_1, a_2 kleinen Störungen unterliegen?

Anmerkung: Hier ist nichts zu rechnen – es handelt sich um rein qualitative asymptotische Überlegungen.

Der in Aufgabe 7 erwähnte Sonderfall wird in der Übung separat diskutiert.

---

[4] Abgesehen von dem Fall, dass $a_1 = a_2 = 0$ gilt – dann ist immer $a_n \equiv 0$.

a) Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

mit einem gegebenen Startwert $a_1 \geq 0$.

Geben Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$ an, die als Grenzwert der Folge infrage kommen.

b) Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge in Abhängigkeit von dem Startwert $a_1 > 0$.

Hinweis: Achten Sie auf das Monotonieverhalten.

Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$a_0 := q, \quad a_n := p\, a_{n-1} + q\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

mit $p > 0$ und $q > 0$.

Interpretation: Zu- ($p > 1$) oder Abnahme ($p < 1$) einer Population a_n um einen Faktor p von Schritt zu Schritt, zusätzlich Zuwachs durch Migration in jedem Schritt.

a) Geben Sie eine explizite Formel in Form einer Summe für die a_n an.

b) Berechnen Sie den 'asymptotischen Zustand' $a_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

- unter Verwendung der Lösungsdarstellung aus **a)**,
- ohne Verwendung von **a)**,

für diejenigen Werte von p, für die dieser Limes existiert.

Hinweis: Man rechnet einige Werte aus und kann so die allgemeine Gestalt der Lösung vermuten. Dann verifiziert man, dass die vermutete Lösung tatsächlich der gegebenen Rekursion genügt.